512.923
Sch2a

DIE

AUFLÖSUNG

DER

ALGEBRAISCHEN UND TRANSZENDENTEN

GLEICHUNGEN

MIT

EINER UND MEHREREN UNBEKANNTEN

IN

REELLEN UND KOMPLEXEN ZAHLEN

NACH

NEUEN UND ZUR PRAKTISCHEN ANWENDUNG

GEEIGNETEN METHODEN.

VON

Dr. HERMANN SCHEFFLER,

BAURATH.

MIT 35 IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

BRAUNSCHWEIG,

VERLAG DER SCHULBUCHHANDLUNG.

1859.

THE UNIVERSITY

OF ILLINOIS

LIBRARY

~~512.23~~ 512.923

Sch2a

MATHEMATICS

DEPARTMENT

Return this book on or before the
Latest Date stamped below.

University of Illinois Library

AUG 2 2 1962
OCT 1 9 1964
JUL 27 RECD
JUL 07 RECD

L161—H41

DIE

AUFLÖSUNG

DER

ALGEBRAISCHEN UND TRANSZENDENTEN

GLEICHUNGEN

MIT

EINER UND MEHREREN UNBEKANNTEN

IN

REELLEN UND KOMPLEXEN ZAHLEN

NACH

NEUEN UND ZUR PRAKTISCHEN ANWENDUNG
GEEIGNETEN METHODEN.

LIBRARY
UNIVERSITY OF ILLINOIS
378.773

Druck und Papier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

DIE

AUFLÖSUNG

DER

ALGEBRAISCHEN UND TRANSZENDENTEN

GLEICHUNGEN

MIT

EINER UND MEHREREN UNBEKANNTEN

IN

REELLEN UND KOMPLEXEN ZAHLEN

NACH

NEUEN UND ZUR PRAKTISCHEN ANWENDUNG
GEEIGNETEN METHODEN.

VON

Dr. HERMANN SCHEFFLER,
BAURATH.

MIT 35 IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

BRAUNSCHWEIG,
VERLAG DER SCHULBUCHHANDLUNG.
1859.

Die Herausgabe einer Uebersetzung in englischer, französischer und anderen modernen Sprachen wird vorbehalten.

512.923
Sch2a

Vorrede.

Wer öfter genöthigt gewesen ist, höhere nummerische Gleichungen aufzulösen, wird die damit verbundene Umständlichkeit kennen und jedes Verfahren zu würdigen wissen, welches der Rechnung Einfachheit und Sicherheit verleiht. Allerdings giebt es bereits für gewisse Klassen von Gleichungen Auflösungsmethoden, welche theils für den praktischen Gebrauch, theils in wissenschaftlicher Hinsicht eine grosse Vollkommenheit besitzen. Vor allen zeichnet sich hierunter behuf der praktischen Anwendung für die reellen Wurzeln der algebraischen Gleichungen das Verfahren von Horner aus, welches von Rutherford auch für die komplexen Wurzeln in der Weise nutzbar gemacht ist, dass er die Operation auf die Lösung einer Gleichung in reellen Zahlen zurückführt, was freilich der Einfachheit bedeutenden Abbruch thut und eine Endgleichung von viel höherem Grade, als dem der gegebenen erzeugt. Ebenso lässt das bekannte Verfahren zur vollständigen Auflösung der reduzirten kubischen Gleichungen mittelst der trigonometrischen Funktionen und das auf einem ähnlichen Prinzipe beruhende Verfahren von Gauss zur Auflösung der trinomischen algebraischen Gleichungen mit Hülfe der Additions- und Subtraktionslogarithmen Nichts zu wünschen übrig. In wissenschaftlicher Hinsicht hat auch die Methode von Gräffe zur vollständigen Auflösung einer algebraischen Gleichung einen besonderen Werth, wenngleich die Praxis einige Schwierigkeit bei der Ausführung derselben finden dürfte. Für die trans-

279428

zendenten Gleichungen ist die bekannte Abhandlung von Stern von Wichtigkeit, indem dieselbe behuf Berechnung der reellen Wurzeln von Gleichungen mit einer Unbekannten allen Anforderungen entspricht.

Man sieht, dass es sich bei allen diesen Methoden stets um spezielle Zwecke oder um einzelne Arten von Gleichungen handelt, dass also eine Verallgemeinerung des Auflösungsverfahrens noch ein Bedürfniss ist. Das vorliegende Werk sucht zur Ausfüllung dieser Lücke Einiges beizutragen und für die vollständige Auflösung der algebraischen und der transzendenten Gleichungen sowohl in reellen, als auch in komplexen Zahlen möglichst einfache, sichere und für den praktischen Gebrauch geeignete Methoden aufzustellen, welche sich zugleich mit Leichtigkeit auf die Lösung von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten übertragen lassen.

Nach dem Plane dieser Schrift, welcher die Entwicklung einer praktischen Auflösungsmethode, nicht aber die allgemeine Theorie der Gleichungen im Auge hat, wird man es gerechtfertigt finden, dass die verschiedenen bekannten Auflösungsmethoden nicht mit vorgetragen sind, vielmehr von denselben, sowie von der eigentlichen Theorie der nummerischen Gleichungen nur so Viel kurz angeführt ist, wie zu dem obigen Plane und zur Abrundung des Ganzen nothwendig erschien.

Braunschweig, im April 1859.

Dr. H. Scheffler.

Inhalt.

I.

Die reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit einer Unbekannten.

Anzahl der Wurzeln.

Seite

§. 1. Allgemeine Bemerkungen 1

§. 2. Die wichtigsten Sätze über die Anzahl der reellen und komplexen Wurzeln 2

§. 3. Die wichtigsten Sätze über die äussersten Grenzen der reellen Wurzeln 8

§. 4. Die Ausscheidung der gleichen Wurzeln 9

§. 5. Praktisches Verfahren zur Berechnung der Funktion $f(x)$ für einen bestimmten Werth $x = r$ und zur Division derselben durch $x - r$ 10

§. 6. Praktisches Verfahren zur Umformung einer Gleichung in eine andere, deren Wurzeln um eine gegebene Grösse r kleiner sind, als die der ersteren 11

§. 7. Berechnung der reellen Wurzeln einer Gleichung nach der Hornerschen Methode 14

§. 8. Die Anwendung der Regula falsi auf die Berechnung der Wurzeln einer Gleichung 24

§. 9. Geometrische Darstellung einer Gleichung und ihrer Derivirten . . . 29

§. 10. Direkte Auflösung einer Gleichung ohne Versuchsrechnung 34

II.

Die reellen Wurzeln zweier algebraischen Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Seite

§. 11. Das gewöhnliche Eliminationsverfahren 38

§. 12. Die wahre Restgleichung unter Berücksichtigung der bei der Eliminationsmethode eingeführten oder ausgeschiedenen Faktoren . . . 40

§. 13. Substitution bestimmter Zahlwerthe für die Unbekannten einer Gleichung, Division der Gleichung durch $(x - r)(y - s)$ und Transformirung derselben in eine andere, deren Wurzeln um r und s kleiner sind 56

Seite
§. 14. Ermittlung einer genäherten Auflösung zweier Gleichungen 61
§. 15. Genauere Berechnung der Wurzeln zweier Gleichungen 71
§. 16. Anwendung der Regula falsi auf die Auflösung zweier Gleichungen . 81

III.

Die komplexen Wurzeln der algebraischen Gleichungen mit einer und zwei Unbekannten.

§. 17. Gewöhnliches Verfahren zur Bestimmung der komplexen Wurzeln einer Gleichung mit einer Unbekannten 88
§. 18. Auflösungsverfahren, welches gleichzeitig die reellen und die komplexen Wurzeln ergiebt 89
§. 19. Anwendung der vorstehenden Formeln auf Gleichungen vom dritten, vierten und fünften Grade 92
§. 20. Ermittlung eines Näherungswerthes für jede reelle oder komplexe Wurzel einer in allgemeinster Form mit reellen oder komplexen Koeffizienten gegebenen Gleichung 95
§. 21. Direkte Berechnung der reellen und der komplexen Wurzeln, die Koeffizienten der gegebenen Gleichung mögen reell sein oder komplex 97
§. 22. Anwendung der Regula falsi auf die Berechnung der komplexen Wurzeln 100
§. 23. Geometrische Konstruktion der komplexen Wurzeln 100
§. 24. Die komplexen Wurzeln zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten 104

IV.

Die Auflösung der transzendenten Gleichungen.

§. 25. Die reellen Wurzeln einer transzendenten Gleichung mit einer Unbekannten 105
§. 26. Beispiele 109
§. 27. Die reellen Auflösungen von zwei transzendenten Gleichungen mit zwei Unbekannten 113
§. 28. Beispiele 115
§. 29. Die komplexen Wurzeln einer transzendenten Gleichung 118
§. 30. Beispiel 119

Nachtrag.

§. 31. Anwendung des im vorstehenden Abschnitte erläuterten Verfahrens auf die algebraischen Gleichungen 121

I.

Die reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit einer Unbekannten.

Anzahl der Wurzeln.

§. 1.

Allgemeine Bemerkungen.

Die Auflösung einer nummerischen Gleichung macht folgende vier Operationen nöthig:

1. die Bestimmung der Anzahl der reellen Wurzeln,
2. die Trennung der reellen Wurzeln, d. h. die Einschliessung einer jeden in zwei Grenzen,
3. die Berechnung der reellen Wurzeln,
4. die Ermittlung der komplexen Wurzeln.

Der jetzige Stand der Theorie der Gleichungen gestattet es, alle diese Operationen an einer algebraischen Gleichung zur Ausführung zu bringen, also die Auflösung derselben, freilich nach Näherungsmethoden, aber mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit zu bewirken. Diese Methoden unterscheiden sich untereinander theils durch die Leichtigkeit ihrer Anwendung, theils durch die Sicherheit, mit welcher ihre ersten Schritte auf das Ziel hinführen. Es ist nun gegenwärtig nicht meine Absicht, eine vollständige Theorie der nummerischen Gleichungen zu geben, sondern eine bequeme und möglichst sichere Auflösungsmethode zu entwickeln und daneben einige Beiträge zu einem Verfahren zu liefern, welches eine unbedingte, von allen Versuchen unabhängige Sicherheit gewährt. Freilich kann zuweilen die Sicherheit nur auf Kosten der Einfachheit erhöht und eine mit absoluter Sicherheit

gepaarte Methode kann unter Umständen unpraktisch werden; allein hierdurch verliert sie Nichts an ihrem wissenschaftlichen Werthe, welcher immer grösser bleibt, als der einer anderen, auf noch so rationelles Probiren basirten Methode: denn der letzteren fehlt immer der Charakter der Nothwendigkeit und der Allgemeinheit, und wenn sie auch in den gewöhnlichen Fällen des Lebens ausreichend und sogar bequem gefunden wird; so wird sie doch bei unendlicher Verallgemeinerung der Fälle hinter einer unbedingt sicheren Methode zurückstehen müssen.

Bei der angekündigten Tendenz dieser Schrift könnte ich mich auf die Mittheilung der nicht schon anderswo erörterten Sätze beschränken. Ich ziehe es jedoch vor, auch von den bekannten Lehren die wichtigsten kurz und ohne Beweis voranzuschicken, weil die Abhandlung durch eine solche Vervollständigung eine grössere praktische Brauchbarkeit gewinnt und es mir scheint, als ob manche hierher gehörigen Lehren, z. B. die Hornersche Auflösungsmethode, bei weitem noch nicht diejenige allgemeine Bekanntschaft bei dem mit Gleichungen operirenden grossen Publikum erlangt haben, welche sie wegen ihrer Einfachheit verdienen.

Demgemäss stelle ich im folgenden Paragraphen zunächst die hauptsächlichsten Lehrsätze über die Anzahl der Wurzeln einer Gleichung zusammen.

§. 2.

Die wichtigsten Sätze über die Anzahl der reellen und komplexen Wurzeln.

Dass eine Gleichung vom $n$ten Grade genau n reelle und komplexe Wurzeln habe, ist schon lange von Gauss und später auch von Cauchy und Anderen bewiesen. Die früheren Beweise waren darauf gerichtet, darzuthun, dass eine jede Gleichung mindestens eine Wurzel a haben müsse, woraus denn folgte, dass auch die durch Division mit $x - a$ entstehende Gleichung vom $n - 1$sten Grade wiederum mindestens eine Wurzel b, also bei Fortsetzung dieses Schlussverfahrens die gegebene Gleichung genau n Wurzeln haben müsse. In Grunert's Archive für Mathematik und Physik, 15. Band, Art. 19 (der Redaktion zugesandt im Jahre 1849), habe ich gezeigt, wie man statt der Existenz von nur einer Wurzel sofort die Koexistenz aller n Wurzeln in der gegebenen Gleichung und ausserdem gewisse allgemeine Beziehungen unter diesen Wurzeln nachweisen kann. Um dieselbe Zeit hat auch Gauss in den Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 4. Band, 1849, einen dasselbe Ziel verfolgenden Beweis veröffentlicht.

Schreiben wir die gegebene Gleichung in der geordneten Form

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

so haben wir folgende Sätze:

1. Jede Gleichung unpaaren Grades hat wenigstens eine reelle Wurzel, deren Zeichen das entgegengesetzte des Zeichens von a_0 ist.
2. Jede Gleichung paaren Grades, deren bekanntes Glied a_0 negativ ist, hat wenigstens zwei reelle Wurzeln, von welchen die eine positiv und die andere negativ ist.
3. Lehrsatz von Harriot oder von Descartes. — Eine vollständige Gleichung hat höchstens so viel positive Wurzeln als Zeichenwechsel und höchstens so viel negative Wurzeln als Zeichenfolgen. Wenn Glieder fehlen, sind dieselben mit dem Koeffizienten 0 zu ergänzen, welchem man sowohl das Zeichen +, wie auch das Zeichen — geben kann

Nimmt man z. B. in der Gleichung $x^3 + 6x + 9 = x^3 \pm 0.x^2 + 6x + 9 = 0$ das Zeichen von 0 positiv; so folgt, dass die Gleichung keine positive Wurzel haben kann. Nimmt man dasselbe negativ; so folgt, dass die Gleichung höchstens eine negative Wurzel haben kann. Da diese Gleichung dritten Grades nothwendig wenigstens eine reelle Wurzel haben muss; so erkennt man, dass dieselbe wirklich eine reelle negative und zwei komplexe Wurzeln hat.

4. Wenn eine vollständige Gleichung lauter reelle Wurzeln hat; so muss sie genau so viel Zeichenwechsel wie positive Wurzeln und genau so viel Zeichenfolgen wie negative Wurzel haben.
5. Eine vollständige Gleichung mit lauter Zeichenwechseln kann keine negative, und eine solche Gleichung mit lauter Zeichenfolgen kann keine positive Wurzel haben.
6. Für eine unvollständige Gleichung (in welcher Glieder fehlen) gilt die Zeichenregel sub 3 hinsichtlich der Zeichenwechsel und positiven Wurzel auch dann noch, wenn man die fehlenden Glieder ganz unberücksichtigt lässt.

Demnach kann man sofort behaupten, dass die Gleichung $x^3 + 6x + 9 = 0$ keine positive Wurzel hat, weil in ihr kein Zeichenwechsel vorkommt.

Was die negativen Wurzeln einer unvollständigen Gleichung betrifft; so kann man ihre grösstmögliche Anzahl beurtheilen, indem man die Zeichen der Glieder von unpaarem Grade umkehrt, also die Funktion $f(-x)$ bildet. Die Gleichung $f(x) = 0$ hat dann höchstens so viel negative Wurzeln, als die Funktion $f(-x)$ Zeichenwechsel besitzt.

Da im obigen Beispiele $f(-x) = -x^3 - 6x + 9$ einen Zeichenwechsel hat; so folgt, dass die Gleichung $x^3 + 6x + 9 = 0$ höchstens eine negative Wurzel hat, was mit dem Resultate sub 3 übereinstimmt.

7. Erster Lehrsatz von Du Gua. — Wenn zwischen zwei Gliedern einer unvollständigen Gleichung eine paare Anzahl, also $2m$ Glieder fehlen; so hat dieselbe wenigstens $2m$ komplexe Wurzeln.

Demnach hat also die Gleichung $x^5+6x^2-8x+1=0$ wenigstens 2 und die Gleichung $x^9-2x^4+7x-3=0$ wenigstens $4+2=6$ komplexe Wurzeln.

8. Zweiter Lehrsatz von Du Gua. — Wenn dagegen zwischen zwei Gliedern eine unpaare Anzahl, also $2m+1$ Glieder fehlen; so hat dieselbe wenigstens $2m+2$ oder $2m$ komplexe Wurzeln, jenachdem die beiden Glieder, zwischen welchen die fehlenden liegen, gleiche oder ungleiche Zeichen haben.

Demnach hat die Gleichung $x^3+6x+7=0$ wenigstens 2 komplexe Wurzeln. Von der Gleichung $x^3-6x+7=0$ kann man jedoch nicht ohne Weiteres behaupten, dass sie komplexe Wurzeln habe. Dagegen muss die Gleichung $x^5-6x+7=0$ wenigstens 2 komplexe Wurzeln haben. Von der Gleichung $x^7-x^5+x^3-x+1=0$, obgleich darin 3 Glieder fehlen, lässt sich das Vorhandensein von komplexen Wurzeln nicht behaupten; dagegen muss die Gleichung $x^7+x^5+x^3+x+1$, worin auch nur 3 Glieder fehlen, wenigstens $2+2+2=6$ komplexe Wurzeln haben.

9. Aus den vorstehenden Sätzen lässt sich leicht der folgende ableiten. Eine unvollständige Gleichung von m Gliedern kann nie mehr als $2m-2$ oder $2m-3$ reelle Wurzeln haben, jenachdem ihr Grad paar oder unpaar ist.

Demnach kann eine Gleichung von 2, 3, 4 Gliedern, wenn ihr Grad paar ist, nie mehr als resp. 2, 4, 6, und wenn ihr Grad unpaar ist, nie mehr als resp. 1, 3, 5 reelle Wurzeln haben.

In den meisten Fällen bestimmt man aber durch die Sätze 7 und 8 die Anzahl der reellen und der komplexen Wurzeln genauer, als durch diesen Satz 9.

10. Lehrsatz von Budan oder von Fourier. — Wenn die Funktion $f(x+p)$ m Zeichenwechsel mehr hat, als die Funktion $f(x+q)$; so kann die Gleichung $f(x)=0$ zwischen den Grenzen p und q höchstens m reelle Wurzeln haben. Hat sie in diesem Intervalle weniger, also nur m' reelle Wurzeln; so ist $m-m'$ stets eine paare Zahl, und die $m-m'$ verlorenen Zeichenwechsel kündigen alsdann ebenso viel komplexe Wurzeln an, sodass also durch alle m verlorenen Zeichenwechsel immer m Wurzeln angekündigt sind.

Wenn p die Grenze aller negativen, und q die Grenze aller positiven reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)$ überschritten hat, so muss $f(x+p)$ lauter Zeichenwechsel und $f(x+q)$ lauter Zeichenfolgen darbieten.

So ergiebt z. B. die Gleichung

$$f(x) = x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101 = 0$$

für $f(x-10)$	$+-+-+-$	also 5	Zeichenwechsel
„ $f(x-1)$	$+--+-+$	„ 4	„
„ $f(x+0)$	$+--+--$	„ 3	„
„ $f(x+1)$	$++-++-$	„ 3	„
„ $f(x+10)$	$++++++$	„ 0	„

Da die oberste Reihe für $p = -10$ lauter Zeichenwechsel und die unterste für $p = 10$ lauter Zeichenfolgen hat; so liegen alle reellen Wurzeln zwischen -10 und $+10$. Insbesondere liegt zwischen -10 und -1 nothwendig eine, ebenso zwischen -1 und 0 eine reelle Wurzel. Zwischen 1 und 10 können höchstens drei reelle Wurzeln liegen; mindestens muss daselbst aber deren eine liegen, indem in diesem Falle zwei andere komplex sein würden.

11. Wenn die gegebene Funktion $f(x)$ oder irgend eine der abgeleiteten Funktionen $f(x+p)$ unvollständig ist, also Nullglieder enthält; so hat man, um den vorstehenden Satz in Anwendung zu bringen, durch angemessene Wahl des Zeichens eines solchen zweideutigen Nullgliedes einmal die grösstmögliche Zahl von Zeichenwechseln, welche dem Werthe $<p$ entspricht, und einmal die kleinstmögliche Zahl von Zeichenwechseln, welche dem Werthe $>p$ entspricht, zu bestimmen. Diese beiden Zahlen können nur eine paare Differenz haben, welche ebenso viel komplexe Wurzeln anzeigt.

So ergiebt die Gleichung

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 3x + 23 = 0$$

für $f(x)$	$+-0--+$
„ $f(x+1)$	$+0---+$
„ $f(x+10)$	$++++++$

oder mit Rücksicht auf die Nullglieder

für $f(x+0)$	$+-+-+$	also 4	Zeichenwechsel,
	$+---+$	„ 2	„
„ $f(x+1)$	$+---+$	„ 2	„
	$++---+$	„ 2	„
„ $f(x+10)$	$++++++$	„ 0	„

Hiernach sind bei 0 zwei komplexe Wurzeln und ausserdem zwischen 1 und 10 zwei Wurzeln angezeigt, von welchen es unentschieden bleibt, ob sie reell oder komplex sind.

Für die Gleichung

$$f(x) = x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$$

hat man

für $f(x-10)$	$+-+-+-+-$	also 7	Zeichenwechsel
„ $f(x-1)$	$+-+-++-+$	„ 6	„
„ $f(x+0)$	$+--+-+-+$	„ 6	„
	$+0-0-+-+$		
	$++--+-+$	„ 4	„
„ $f(x+1)$	$++++--+$	„ 2	„
„ $f(x+10)$	$++++++++$	„ 0	„

Demnach liegt zwischen -10 und -1 eine reelle Wurzel, bei 0 sind zwei komplexe Wurzeln und ausserdem zwischen 0 und 1 zwei Wurzeln angezeigt, welche reell oder komplex sein können.

12. Lehrsatz von Sturm. — Wenn $X=0$ die gegebene und $X_1=0$ die durch Differentiation entstehende derivirte Gleichung $nx^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}\,x^{n-2} + (n-2)\,a_{n-2}\,x^{n-3} + \ldots = 0$ ist; so seien $X_2, X_3, X_4 \ldots$ die mit entgegengesetzten Zeichen genommenen Reste und $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots$ die Quotienten, welche sich bei der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Masses zwischen X und X_1 ergeben; es sei also

$$\begin{aligned} X &= X_1 Q_1 - X_2 \\ X_1 &= X_2 Q_2 - X_3 \\ X_2 &= X_3 Q_3 - X_4 \\ &\vdots \\ X_{m-2} &= X_{m-1} Q_{m-1} - X_m \end{aligned}$$

Der letzte Rest X_m ist von x unabhängig, und wenn die gegebene Gleichung keine gleichen Wurzeln hat, auch von null verschieden.

Setzt man in jede der Funktionen

$$X, X_1, X_2 \ldots X_m$$

für x einmal die Zahl p und einmal die Zahl q; so ergeben sich zwei Zeichenreihen, und die Gleichung $X=0$ hat zwischen den Grenzen p und q genau so viel reelle Wurzeln, als die erste Reihe Zeichenwechsel mehr enthält, als die zweite.

Nimmt man also $p = -\infty$ und $q = +\infty$; so erfährt man sofort die Anzahl aller reellen Wurzeln, unter der Voraussetzung, dass darunter keine gleichen vorkommen.

So erhält man z. B. für die Gleichung

$$X = x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0$$
$$X_1 = 5x^4 - 30x^2 + 6$$
$$X_2 = 20x^3 - 24x - 5$$
$$X_3 = 96x^2 - 5x - 24$$
$$X_4 = 43651x + 10920$$
$$X_5 = +$$

	X	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
für $x = -\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	also 5 Zeichenwechsel,
„ $x = +\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	„ 0 „

Demnach hat die Gleichung 5 reelle Wurzeln.

Ferner ergiebt sich

	X	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
für $x = -4$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	also 5 Zeichenwechsel,
„ $x = -3$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	„ 4 „
„ $x = -2$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	„ 4 „
„ $x = -1$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	„ 4 „
„ $x = 0$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	„ 2 „
„ $x = 1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	„ 1 „
„ $x = 2$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	„ 1 „
„ $x = 3$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	„ 1 „
„ $x = 4$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	„ 0 „

Es liegt mithin eine Wurzel zwischen -4 und -3, zwei zwischen -1 und 0, eine zwischen 0 und 1, eine zwischen 3 und 4.

13. Stösst man unter den Funktionen X, X_1 X_2 . . . auf eine X_r, welche so beschaffen ist, dass sie für keinen Werth von x ihr Zeichen ändern kann; so muss die Gleichung $X_r = 0$ lauter komplexe Wurzeln enthalten. Man kann alsdann die Operation der Aufsuchung des gemeinschaftlichen Masses abbrechen und die Betrachtung auf die Funktionen X, X_1, X_2 . . . X_r beschränken.

14. Wenn die gegebene Gleichung gleiche Wurzeln hat; so ist die letzte der Funktionen X, X_1, X_2 . . . X_p ein gemeinschaftliches Mass aller vorhergehenden, und die Gleichung $X_p = 0$ enthält die gleichen Wurzeln einmal weniger als die Gleichung $X = 0$. Demnach enthält die Gleichung

$$\frac{X}{X_p} = X' = 0$$

alle verschiedenen Wurzeln nur einmal. Man kann also zur Bestimmung der letzteren die obige Betrachtung auf die Funktionen

$$X', X'_1, X'_2 \ldots$$

anwenden. Die Anzahl der Zeichenwechsel dieser Reihe ist aber dieselbe, wie die Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe

$$X, X_1, X_2 \ldots$$

Demgemäss ergiebt die Betrachtung der Funktionen

$$X, X_1, X_2 \ldots X_p$$

die Anzahl und Lage aller reellen Wurzeln ohne Wiederholung, und die Gleichung $X_p = 0$, auf welche dasselbe Schlussverfahren, wie auf $X = 0$ angewandt werden kann, lehrt schliesslich die übrigen Wurzeln kennen.

§. 3.

Die wichtigsten Sätze über die äussersten Grenzen der reellen Wurzeln.

Da man durch Umkehrung der Zeichen der Glieder von unpaarem Grade die negativen Wurzeln einer Gleichung in positive verwandelt; so braucht man bei der Grenzbestimmung nur die positiven Wurzeln ins Auge zu fassen.

Die wichtigsten hierauf bezüglichen Sätze sind

1. Wenn in der Gleichung
$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$
der zweite Koeffizient a_{n-1} negativ und jeder folgende positiv ist; so ist der positive Werth von a_{n-1} eine obere Grenze der positiven Wurzeln.
2. In jeder Gleichung bildet nach Maclaurin der um 1 vermehrte positive Werth des grössten negativen Koeffizienten $-a_r$, also der Werth $a_r + 1$ eine obere Grenze der positiven Wurzeln.
3. Wenn in einer Gleichung $-a_m$ der erste negative und $-a_r$ der grösste negative Koeffizient ist; so ist $1 + \sqrt[n-m]{a_r}$ eine obere Grenze der positiven Wurzeln.
4. Wenn $-a_m$ der erste negative, $-a_r$ der grösste negative und a_s der grösste derjenigen positiven Koeffizienten $a_n, a_{n-1} \ldots a_{m+1}$, welche dem Gliede $-a_m$ vorangehen, ist; so stellt nach Vène $\frac{a_r}{a_s} + 1$ eine obere Grenze der positiven Wurzeln dar.
5. Wenn in einer Gleichung jeder negative Koeffizient positiv genommen und durch die Summe aller vorangehenden positiven Koeffizienten dividirt wird, so ist nach Bret der grösste hierdurch erhaltene Quotient, um 1 vermehrt, eine obere Grenze der positiven Wurzeln.

6. Um eine untere Grenze der positiven Wurzeln zu finden, braucht man nur durch Substitution von $x = \frac{1}{x'}$ die Gleichung

$$a_0 x'^n + a_1 x'^{n-1} + a_2 x'^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + 1 = 0$$

herzustellen, welche die reziproken Werthe der Wurzeln der gegebenen Gleichung enthält, und nun nach den vorstehenden Sätzen die obere Grenze von x' zu ermitteln.

§. 4.

Die Ausscheidung der gleichen Wurzeln.

Wenn die gegebene Gleichung gleiche Wurzeln, also die allgemeine Zusammensetzung

$$f(x) = (x - a_1)^p (x - a_2)^q (x - a_3)^r \ldots$$

hat; so ist die derivirte Funktion

$$f_1(x) = [(x - a_1)^{p-1} (x - a_2)^{q-1} (x - a_3)^{r-1} \ldots] \times$$
$$[(x - a_2)(x - a_3) \ldots + (x - a_1)(x - a_3) \ldots + (x - a_1)(x - a_2) \ldots + \text{etc.}]$$

Beide haben das gemeinschaftliche Mass

$$\varphi(x) = (x - a_1)^{p-1} (x - a_2)^{q-1} (x - a_3)^{r-1} \ldots$$

Die derivirte Funktion und das grösste gemeinschaftliche Mass enthalten also die vielfachen Wurzeln einmal weniger, also die gegebene Gleichung.

Bezeichnet man nun mit Hudde in der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$

durch X_1 das Produkt der einfachen Faktoren
„ X_2^2 „ „ „ zweifachen „
„ X_3^3 „ „ „ dreifachen „
„ X_4^4 „ „ „ vierfachen „
„ X_5^5 „ „ „ fünffachen „

und sofort; so hat man

$$f(x) = X_1 X_2^2 X_3^3 X_4^4 X_5^5 \ldots$$

und das grösste gemeinschaftliche Mass $\varphi(x)$ zwischen $f(x)$ und ihrer Derivirten $f_1(x)$ ist

$$\varphi(x) = X_2 X_3^2 X_4^3 X_5^4 \ldots$$

Ferner ist, wenn $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)$ . . . resp. das grösste gemeinschaftliche Mass zwischen $\varphi(x)$ und ihrer Derivirten $\varphi_1(x)$, zwischen $\varphi'(x)$ und ihrer Derivirten $\varphi'_1(x)$, zwischen $\varphi''(x)$ und ihrer Derivirten $\varphi''_1(x)$ bezeichnet,

$$\varphi'(x) = X_3 X_4^2 X_5^3$$
$$\varphi''(x) = X_4 X_5^2$$
$$\varphi'''(x) = X_5 \text{ u. s. w.}$$

folglich

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = X\ X_2\ X_3\ X_4\ X_5\ \ldots = F(x)$$

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} = X_2\ X_3\ X_4\ X_5\ \ldots = F'(x)$$

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi''(x)} = X_3\ X_4\ X_5\ \ldots = F''(x)$$

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi'''(x)} = X_4\ X_5\ \ldots = F'''(x)$$

u. s. w. Hieraus ergeben sich endlich zur Bestimmung der einfachen, der zweifachen, der dreifachen Wurzeln u. s. w. die Gleichungen

$$\frac{F(x)}{F'(x)} = X = 0$$

$$\frac{F'(x)}{F''(x)} = X_2 = 0$$

$$\frac{F''(x)}{F'''(x)} = X_3 = 0 \text{ u. s. w.}$$

§. 5.

Praktisches Verfahren zur Berechnung der Funktion $f(x)$ für einen bestimmten Substitutionswerth $x = r$ und zur Division derselben durch $x - r$.

Diese beiden Operationen, welche bei der Auflösung der Gleichungen eine wesentliche Rolle spielen, lassen sich beide auf einmal durch folgendes einfache Verfahren ausführen.

Die Aufgabe besteht darin, aus der gegebenen Gleichung

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

den nach Potenzen von x geordneten ganzen Quotienten der Division mit $x - r$

$$b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + b_{n-3} x^{n-3} + \ldots + b_1 x + b_0 = 0$$

und ausserdem den durch die Substitution $x = r$ sich ergebenden Werth

$$f(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} r^{n-2} + \ldots + a_1 r + a_0$$

welcher zugleich den bei jener Division verbleibenden Rest darstellt, zu berechnen.

Zu diesem Ende schreibt man die Koeffizienten a_n, a_{n-1} ... der Funktion $f(x)$ mit ihren Zeichen in eine Reihe nebeneinander, alsdann multiplizirt man den ersten Koeffizienten a_n mit r und addirt zu diesem Produkte den zweiten Koeffizienten a_{n-1}. Hierauf multiplizirt man diese

Summe mit r und addirt zu dem Produkte den dritten Koeffizienten u. s. f. Auf diese Weise ergeben sich in den gedachten Summen der Reihe nach die Koeffizienten b_{n-1}, b_{n-2} . . . des Quotienten und schliesslich der Rest der Division oder der Werth von $f(r)$.

Fehlende Glieder müssen durch Nullen ersetzt werden.

Wäre z. B.

$$f(x) = 3x^6 - 6x^4 + 4x^3 - x - 45624$$

durch $x + 5$ zu dividiren und, da hier $r = -5$ ist, $f(-5)$ zu bilden; so hat man

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
3 + & 0 - & 6 + & 4 + & 0 - & 1 - & 45624 & (-5 \\
 & -15 + & 75 - & 345 + & 1705 - & 8525 + & 42630 & \\
\hline
3 - & 15 + & 69 - & 341 + & 1705 - & 8526 - & 2994 &
\end{array}$$

also für den gesuchten Quotienten

$$3x^5 - 15x^4 + 69x^3 - 341x^2 + 1705x - 8526$$

und für den Rest oder

$$f(-5) = -2994$$

Oder wäre

$$52x^3 - 3{,}25x^2 + 47x - 73{,}084$$

durch $x - 15{,}231$ zu dividiren und $f(15{,}231)$ bis auf drei Dezimalstellen herzustellen; so hat man

$$\begin{array}{rrrr}
52 & -3,250 & +47 & -73,084 \\
 & 761\ 55 & 7887\ 62 & 120606\ 34 \\
 & 30\ 462 & 3943\ 810 & 60303\ 170 \\
 & \overline{792\ 012} & 157\ 752 & 2412\ 127 \\
 & & 23\ 663 & 361\ 819 \\
 & & 789 & 12\ 061 \\
 & & \overline{12013\ 634} & \overline{183695\ 517} \\
\hline
52 + & 788,762 + & 12060,634 + & 183622,433
\end{array}$$

Der Quotient ist also

$$52x^2 + 788{,}762x + 12060{,}634$$

und der Rest oder

$$f(15{,}231) = 183622{,}433$$

§. 6.

Praktisches Verfahren zur Umformung einer Gleichung in eine andere, deren Wurzeln um eine gegebene Grösse r kleiner sind als die der ersteren.

Wenn

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

die gegebene Gleichung ist; so findet man die Gleichung

$$f'(x') = a'_n x'^n + a'_{n-1} x'^{n-1} + \ldots + a'_1 x' + a'_0 = 0$$

deren Wurzeln

$$x' = x - r$$

um r kleiner sind, als die der gegebenen, indem man in die erstere $x = x' + r$ substituirt. Auf eine bequemere Art erhält man aber die Koeffizienten der transformirten Gleichung in der umgekehrten Reihenfolge $a'_0, a'_1, a'_2 \ldots a'_n$, indem man die gegebene Gleichung $f(x)$ nach der Regel des vorhergehenden Paragraphen durch $x - r$ dividirt, alsdann den erhaltenen Quotienten ebenfalls durch $x - r$ dividirt, darauf den sich ergebenden Quotienten wiederum durch $x - r$ dividirt u. s. f. Die bei den einzelnen Divisionen verbleibenden Reste stellen sukzessive die Koeffizienten $a'_0, a'_1, a'_2 \ldots a'_n$ der transformirten Gleichung $f'(x')$ dar.

Wenn r negativ, also $-r$ positiv ist; so entspricht die vorstehende Regel dem Falle, wo die Wurzeln der transformirten Gleichung um r grösser sind, als die der gegebenen.

Soll z. B. die Gleichung

$$x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 3x - 105 = 0$$

in eine andere verwandelt werden, deren Wurzeln um 2 kleiner sind; so hat man wiederholt durch $x - 2$ zu dividiren. Diess giebt

$$\begin{array}{rrrrrl}
1 + & 5 + & 4 + & 3 - & 105 & (2 = r \\
 & 2 + & 14 + & 36 + & 78 & \\
\hline
1 + & 7 + & 18 + & 39 - & 27 & = a'_0 \\
 & 2 + & 18 + & 72 & & \\
\hline
1 + & 9 + & 36 + & 111 & & = a'_1 \\
 & 2 + & 22 & & & \\
\hline
1 + & 11 + & 58 & & & = a'_2 \\
 & 2 & & & & \\
\hline
1 + & 13 & & & & = a'_3
\end{array}$$

Demnach ist die gesuchte Gleichung

$$x'^4 + 13x'^3 + 58x'^2 + 111x' - 27 = 0$$

Nach diesem Schema lässt sich dann auch leicht die für die Auflösung der Gleichungen wichtige Transformation in eine Gleichung herstellen, in welcher das zweite Glied fehlt. Denn in diesem Falle muss

$$x = x' - \frac{a_{n-1}}{n}, \text{ also } x' = x + \frac{a_{n-1}}{n}$$

sein; man hat also die obigen Divisionen mit $x + \frac{a_{n-1}}{n}$ auszuführen.

Soll z. B. aus der Gleichung

$$x^4 - 12x^3 + 17x^2 - 9x + 7 = 0$$

das zweite Glied weggeschafft werden; so ist mit $x - 3$ zu dividiren. Diess giebt

$$\begin{array}{rrrrrl} 1 & -12 & +17 & -9 & +7 & (3 = r \\ & 3 & -27 & -30 & -117 & \\ \hline 1 & -9 & -10 & -39 & -110 & = a'_0 \\ & 3 & -18 & -84 & & \\ \hline 1 & -6 & -28 & -123 & & = a'_1 \\ & 3 & -9 & & & \\ \hline 1 & -3 & -37 & & & = a'_2 \\ & 3 & & & & \\ \hline 1 & +0 & & & & = a'_3 \end{array}$$

also für die transformirte Gleichung

$$x'^4 - 37x'^2 - 123x' - 110 = 0$$

Ist die Zahl, um welche die Wurzeln einer Gleichung vermehrt oder vermindert werden sollen, mehrziffrig; so kann man, wenn man die Multiplikationen immer nur mit einer Ziffer ausführen will, die Vermehrung oder Verminderung mit einer Ziffer nach der anderen ausführen. Sind z. B. die Wurzeln um 65,24 zu vermindern, sodass $x - 65{,}24$ der Divisor ist; so kann man für alle Divisionen erst den Faktor 60, dann 5, dann 0,2, dann 0,04 anwenden. Sind die Wurzeln um 65,24 zu vermehren, sodass $x + 65{,}24$ der Divisor ist; so kann man nach und nach den Faktor — 60, — 5, — 0,2, — 0,04 in Anwendung bringen.

Will man bei diesen Operationen die Koeffizienten nur bis auf eine bestimmte Dezimalstelle genau ermitteln; so lässt man nach den bekannten Regeln der abgekürzten Multiplikation die späteren Dezimalstellen gleich während der Rechnung weg.

Jede spätere Operation schliesst sich an die vorhergehende ohne Lücke nach folgendem Schema an.

Sollen in dem zuletzt behandelten Beispiele die Wurzeln der Gleichung

$$x^4 - 12x^3 + 17x^2 - 9x + 7 = 0$$

um 3,27 vermindert werden; so erhält man für die Division mit $x - 3$ genau die obigen Zahlen, und hieran reihen sich die Zahlen der Division mit $x - 0{,}2$ und dann die der Division mit $x - 0{,}07$ folgendermassen an.

1	— 12	+ 17	— 9	+ 7	(3
	3	— 27	— 30	— 117	
1	— 9	— 10	— 39	— 110	(0,2
	3	— 18	— 84	— 26,0784	
1	— 6	— 28	— 123	— 136,0784	(0,07
	3	— 9	— 7,392	— 9,82358559	
1	— 3	— 37	— 130,392	— 145,90198559	
	3	0,04	— 7,376		
1	0	— 36,96	— 137,768		
	0,2	0,08	— 2,568937		
1	0,2	— 36,88	— 140,336937		
	0,2	0,12	— 2,564331		
1	0,4	— 36,76	— 142,901268		
	0,2	0,0609			
1	0,6	— 36,6991			
	0,2	0,0658			
1	0,8	— 36,6333			
	0,07	0,0707			
1	0,87	— 36,5626			
	0,07				
1	0,94				
	0,07				
1	1,01				
	0,07				
1	1,08				

Die transformirte Gleichung, deren Wurzeln $x' = x - 3{,}27$ um 3,27 kleiner sind, als die der gegebenen, ist also

$$x'^4 + 1{,}08\,x'^3 - 36{,}5626\,x'^2 - 142{,}901268\,x' - 145{,}90198559 = 0$$

§. 7.

Berechnung der reellen Wurzeln einer Gleichung nach der Hornerschen Methode.

1) Nachdem eine reelle Wurzel einer Gleichung erst zwischen zwei nahe gelegene Grenzwerthe eingeschlossen ist, lässt sich ihr genauerer

Werth am bequemsten durch das von Horner angegebene Verfahren berechnen. Dieses Verfahren geht darauf aus, nachdem auf irgend eine Weise die Anfangsziffer des dekadisch gebildeten Zahlwerthes einer Wurzel gefunden ist, nachundnach die zweite, dritte, vierte und jede folgende Ziffer zu bestimmen. Wäre nun die auf andere Weise bereits gefundene erste Ziffer unter Berücksichtigung ihres dekadischen Werthes $= r$ und der fehlende Theil der Wurzel $= x'$, also $x = r + x'$; so stellt man zu obigem Zwecke aus der gegebenen Gleichung

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \quad \ldots . (1)$$

diejenige her, deren Wurzeln x' um r kleiner sind, für welche man also $x' = x - r$ hat. Diese Gleichung

$$f'(x') = a'_n x'^n + a'_{n-1} x'^{n-1} + \ldots + a'_1 x' + a'_0 = 0 \ldots . (2)$$

erhält man nach §. 6, indem man die gegebene nach §. 5 wiederholt durch $x - r$ dividirt.

Vernachlässigt man in dieser Gleichung alle höheren Potenzen von x', schreibt dieselbe also abgekürzt

$$a'_1 x' + a'_0 = 0 \quad . . . . . (3)$$

so ist

$$x' = \frac{-a'_0}{a'_1} \quad . . . . . (4)$$

ein Näherungswerth von x', aus welchem man die erste Ziffer r' von x', also die zweite Ziffer von x bestimmt.

Diese aus dem Näherungswerthe (4) gefundene Ziffer r' bedarf einer Kontrole. Am einfachsten übt man diese Kontrole dadurch aus, dass man in Gl. (2) für x' einmal den Werth r' und dann den um 1 erhöhten Werth der Ziffer r' substituirt. Wenn r' die richtige Anfangsziffer von x' ist, so müssen diese beiden Substitutionen Resultate mit entgegengesetzten Zeichen geben. Fände man zwei Resultate mit gleichen Zeichen; so wäre r' nicht die richtige Ziffer: ob dieselbe aber vergrössert oder verkleinert werden müsste, würde man aus der relativen Grösse jener Resultate erkennen, wenn man berücksichtigt, dass dieselben für den genauen Werth von x' gleich null werden müssten *).

---

*) Gewöhnlich wird als Kontrole verlangt, dass man den Näherungswerth r' für x' in die rechte Seite des aus Gl. (2) sich ergebenden Ausdruckes

$$x' = \frac{-a'_0}{a'_1 + a'_2 x' + a'_3 x'^2 + \ldots + a'_n x'^{n-1}}$$

substituire und nachsehe, ob diess Resultat wirklich die Anfangsziffer r' wiedererzeuge. Dieses Kontroleverfahren ist viel umständlicher, als das oben bezeichnete; denn theils darf man nicht glauben, dass wenn die Substitution $x' = r'$ in den eben notirten genauen Ausdruck das Resultat $x' > r'$ und $x' < r' + 1$ ergäbe, nun wirklich r' die richtige Anfangsziffer von x' sei. Man muss vielmehr ausser r' auch einmal $r' + 1$ in die rechte Seite substituiren, und r' ist nur dann die richtige Ziffer, wenn entweder

Die Substitution $x' = r'$ in Gl. (2) ist zugleich der nächste Schritt der weiteren Operation, indem zur Bestimmung der dritten Ziffer der Wurzel x aus der ersten transformirten Gleichung (2) durch Verkleinerung der Wurzeln x' um den Betrag der Ziffer r' die zweite transformirte Gleichung

$$f''(x'') = a''_n x''^n + a''_{n-1} x''^{n-1} + \ldots + a''_1 x'' + a''_0 = 0 \quad . \quad (5)$$

gebildet wird, in welcher $x'' = x' - r'$ ist.

Die erste Ziffer von x'' ist die dritte von x. Man erhält für dieselbe einen Näherungswerth aus der abgekürzten Formel

$$a''_1 x'' + a''_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

oder aus

$$x'' = \frac{-a''_0}{a''_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Die aus (7) gefundene Ziffer r'' wird durch Substitution von r'' und $r'' + 1$ in Gl. (5) kontrolirt und eventuell berichtigt.

Hierauf wird aus der zweiten transformirten Gleichung (5) die dritte durch fernere Verkleinerung der Wurzeln um den Werth der Ziffer r'' hergestellt und die vierte Ziffer r''' ermittelt.

Wenn die zu berechnende Wurzel durch die fortgesetzte Verkleinerung eine hinreichende Kleinheit erlangt hat, wird die Kontrole der aus den abgekürzten Formeln sich ergebenden Ziffern offenbar überflüssig.

Ausserdem würde sich eine falsche Ziffer im Verlaufe der Rechnung auch dadurch kund thun, dass man für eine spätere Ziffer einen Werth $\geqq 10$ oder einen negativen Werth erhielte. Wenn erst einige Ziffern sicher ermittelt sind, kann aus der Unterlassung der Kontrole überhaupt kein Fehler entstehen. Hätte man aber in den ersten Ziffern einen solchen Fehler begangen, und würde durch das spätere Erscheinen einer Ziffer $\geqq 10$ oder einer negativen Ziffer darauf aufmerksam gemacht; so würde es nicht unbedingt nöthig sein, nochmals die ganze frühere Rechnung zu wiederholen; man könnte vielmehr an dieser Stelle durch die Kontrole vorher den ganzen vorderen Theil der Wurzel mit einem Male feststellen.

---

die Substitution von r' das Resultat $> r'$
und „ „ „ $r' + 1$ „ „ $< r' + 1$
oder wenn
die Substitution von r' das Resultat $< r'$
und „ „ „ $r' + 1$ „ „ $> r' + 1$
ergiebt und wenn zugleich mit der Substitution von r' und $r' + 1$ ein Zeichenwechsel des bekannten Gliedes der nächstfolgenden transformirten Gleichung verbunden ist.

Ausserdem hat man hier Substitutionen zu machen, deren Mühe für die fernere Rechnung verloren ist, wogegen bei dem obigen Verfahren die eine Substitution immer schon der folgenden Rechnung zu gut kömmt.

2. Es leuchtet ein, dass man sich immer nur mit der Berechnung positiver Wurzeln zu befassen hat, indem die negativen leicht in positive zu verwandeln sind.

Übrigens wird vorausgesetzt, dass von der zu berechnenden Wurzel nicht bloss die Anfangsziffer bekannt sei, sondern dass die Gleichung nicht noch eine andere Wurzel habe, welche gleichfalls mit derselben Anfangsziffer beginnt. Wäre Letzteres der Fall; so müsste die zu berechnende Wurzel von der nächst grösseren erst getrennt, es müssten also alle Anfangsziffern ermittelt sein, durch welche sich die erste Wurzel von der nächst grösseren unterscheidet.

Bei gehöriger Aufmerksamkeit kann man die Wurzeln, welche eine gewisse Menge von Anfangsziffern gemein haben, welche sich also nahe liegen, auch durch den Hornerschen Rechnungsprozess entdecken. Zu dem Ende beachte man, dass wenn . . . r die Anfangsziffern sind, welche in zwei benachbarten Wurzeln gemeinschaftlich vorkommen und es ist r' die nächstfolgende Ziffer der ersten Wurzel und s' die nächstfolgende Ziffer der zweiten Wurzel; so muss man finden, dass jede für sich der genauen Formel (2) genügt, dass also r' und $r' + 1$, sowie auch s' und $s' + 1$ einen Zeichenwechsel nach sich zieht.

Gleichzeitig muss aber auch r' und s' einen Zeichenwechsel oder $r' + 1$ und s' keinen Zeichenwechsel bedingen.

Der Werth von $f'(x')$ aus (2) für $x' = r'$ ist aber gleich dem Werthe des bekannten Gliedes a''_0 aus der nächsten transformirten Gleichung (5), weil dieses Glied der Werth von $f'(x'')$ für $x'' = 0$ ist. Demnach erkennt man das Vorhandensein der nächst grösseren Wurzel daran, dass während der Ausdruck (3) durch zwei Zahlen r' und s' erfüllt wird, das bekannte Glied a''_0 der Gleichung (5) das Zeichen wechselt, sobald r' in s' übergeht.

Bei dem Überspringen einer Wurzel, welches vorkommt, wenn man von dem Näherungswerthe . . . r zur Berechnung der zweiten Wurzel . . . rs' übergeht, indem dabei die erste Wurzel . . . rr' übersprungen wird, hat man auf diese Zeichenwechsel genau zu achten, indem es sich dann leicht ereignet, dass die Gleichung (2) durch mehrere Ziffern, wovon jedoch nur die betreffende zu nehmen ist, erfüllt wird. (Vergleiche weiter unten das Zahlenbeispiel sub No. 6.)

In allen Fällen ist es rathsam, zu beachten, dass wenn keine Wurzel übersprungen wird, das Zeichen der bekannten Glieder a'_0, a''_0, a'''_0 . . . fortwährend dasselbe bleiben muss.

Wenn eine oder überhaupt eine unpaare Anzahl von Wurzeln übersprungen wird, muss ein Zeichenwechsel eintreten.

Wenn eine paare Anzahl von Wurzeln übersprungen wird, tritt kein Zeichenwechsel ein.

Wenn also mehrere Wurzeln übersprungen werden können, ist der Theilung der Intervalle und den Zeichenwechseln besondere Aufmerksamkeit zu widmen.

Wenn eine aus der Näherungsformel (4) zu bestimmende Ziffer r' keiner Dezimalstelle, sondern dem ganzen Theile der Wurzel x angehört; so könnte es befremden, dass dessenungeachtet jene Formel (4) in den meisten Fällen einen Näherungswerth für die Ziffer r' liefert, da doch diese Formel auf einer Vernachlässigung der höheren Potenzen von r' beruht.

Zur Erläuterung dieser Erscheinung beachte man, dass in der gegebenen Gleichung (1), wenn man deren Wurzeln mit x_1, x_2, x_3 . . . bezeichnet,

$$a_0 = \pm x_1 x_2 x_3 \ldots$$
$$a_1 = \mp (x_1 x_2 \ldots + x_1 x_3 \ldots + x_2 x_3 \ldots + \ldots)$$

und dass in der transformirten Gleichung (2)

$$a'_0 = \pm x'_1 x'_2 x'_3 \ldots$$
$$a'_1 = \mp (x'_1 x'_2 \ldots + x'_1 x'_3 \ldots + x'_2 x'_3 \ldots + \ldots$$

also

$$\frac{-a'_0}{a'_1} = \frac{x'_1 x'_2 x'_3 \ldots}{x'_1 x'_2 \ldots + x'_1 x'_3 \ldots + x'_2 x'_3 \ldots + \ldots}$$

ist.

Ist nun x_1 diejenige Wurzel, welche man bei der Bildung dieser transformirten Gleichung bestimmen will, sodass alle Wurzeln um $x_1 - x'_1$ vermindert sind; so stellt die vorstehende Formel, welche auch in der Form

$$\frac{-a'_0}{a'_1} = \frac{x'_1}{1 + \frac{x'_1}{x'_2} + \frac{x'_1}{x'_3} + \frac{x'_1}{x'_4} + \ldots}$$

geschrieben werden kann, nahezu den Werth von x'_1 dar, wenn die Grössen $\frac{x'_1}{x'_2}$, $\frac{x'_1}{x'_3}$, $\frac{x'_1}{x'_4}$ . . . ziemlich kleine echte Brüche sind. Diese Brüche sind aber immer dann ziemlich klein, wenigstens immer dann echt, wenn die Wurzel x_1 mit keiner der übrigen Wurzeln x_2, x_3 . . . dieselbe Anfangsziffer (natürlich von demselben dekadischen Range) gemein hat. Denn setzt man die zu bestimmende Wurzel $x_1 = r 10^p + r' 10^{p-1} + \ldots$ und irgend eine andere $x_2 = s 10^q + s' 10^{q-1} + \ldots$; so ist $x'_1 = r' 10^{p-1} + \ldots$ und $x'_2 = x_2 - r 10^p = -r 10^p + s 10^q + s' 10^{q-1} + \ldots$, folglich

$$\frac{x'_1}{x'_2} = \frac{r' 10^{p-1} + \ldots}{-r 10^p + s 10^q + s' 10^{q-1} + \ldots} = \frac{r' + \ldots}{10(-r + s 10^{q-p} + \ldots)}$$

Dieser Bruch ist aber immer < 1, solange nicht $q = p$ und gleichzeitig $r = s$ ist, d. h. solange nicht die beiden Wurzeln x_1 und x_2 gleiche Anfangsziffern (von demselben Range) haben. Aber auch im Falle dieser Gleichheit ist jener Bruch noch nicht unbedingt > 1; er bleibt vielmehr < 1 oder nahezu $= 1$, wenn ausser den ersten Anfangsziffern r, s auch noch die zweiten Ziffern r', s' gleich sind, sodass die erheblichere Abweichung erst bei derjenigen transformirten Gleichung eintritt und nur in dem Stadium herrscht, wo man von den übereinstimmenden zu den verschiedenen Zif-

fern der beiden Wurzeln x_1, x_2 überzugehen im Begriffe ist, ein Fall, welcher schon oben erwähnt ist.

3. Als Beispiel sei die Gleichung

$$x^4 - 312\,x^3 + 23337\,x^2 + 14874\,x + 2360 = 0$$

gegeben. Zwei Wurzeln liegen zwischen 100 und 200; die erste liegt zwischen 100 und 130, die zweite zwischen 130 und 200. Um die erstere zu ermitteln kann man sogleich $r = 120$ setzen; man kann aber auch, wenn man die Multiplikationen nur mit einziffrigen Zahlen ausführen will, erst $r = 100$ und darauf $r' = 20$ nehmen. Das letztere Verfahren, wonach die Wurzeln erst um $r = 100$ erniedrigt werden, giebt folgende Rechnung.

1 — 312	23337	14874	2360	(100 = r
100	— 21200	213700	22857400	
1 — 212	2137	228574	22859760	(20 = r'
100	— 11200	— 906300	—16795720	
1 — 112	— 9063	— 677726	6064040	(6 = r''
100	— 1200	— 162060	— 5759280	
1 — 12	— 10263	— 839786	304760	(0,3 = r'''
100	2160.	— 110860	— 288725,8779	
1 88	— 8103	— 950646	16034,1221	(0,01 = r''''
20	2560	— 9234	— 9621,7953	
1 108	— 5543	— 959880	6412,3268	(0,006
20	2960	— 2754	— 5772,9970	
1 128	— 2583	— 962634	639,3298	(0,0006
20	1044	214,407	— 577,2964	
1 148	— 1539	— 962419,593	62,0334	(0,00006
20	1080	231,741	— 57,7296	
1 168	— 459	— 962187,852	4,3038	(0,000004
6	1116	8,323	— 3,8486	
1 174	657	— 962179,529	0,4552	(0,0000004
6	57,69	8,34.	— 0,3848	
1 180	714,69	— 962171,19	0,0704	(0,00000007
6	57,78	5,02	— 673	
1 186	772,47	— 962166,17	0,0031	(0,000000003
6	57,87	5,0.	— 0,0029	
1 192	830,34	— 962161,2	0,0002	(0,000000000(2)
0,3	1,93	0,5	— 0,0002	
1 192,3	832,27	— 962160,|7	0,0000	
0,3	1,9.	— 96216|0,		
1 192,6	834,2	— 9621|6.,		
0,3	2,.	— 962|1. .,		
1 192,9	8|3|6,	— 96|2. . .,		
0,3		— 9|6. . . .,		
1 1|9|3,|2		—|9.		

Hiernach ist die gesuchte Wurzel

$$x = 126{,}316664473(2)\ldots$$

Zur Erläuterung der vorstehenden Rechnung dient Folgendes: Für die zweite Ziffer 2 oder für $r' = 20$ würde die Näherungsformel (4) zunächst $r' = \frac{-22859760}{-677726} = 30$ geben. Die Kontrole durch Gl. (3) lehrt aber, da hiernach

$$r' = \frac{-27859760}{-677726 - 10263r' + 88r'^2 + r'^3}$$

sein muss, dass man $r' = 20$ zu nehmen hat.

In den folgenden Stellen giebt die Näherungsformel jedesmal die richtige Ziffer.

Bis zur vierten Ziffer 3 oder $r''' = 0{,}3$ einschliesslich sind alle Multiplikationen vollständig ausgeführt. Diess giebt in den letzten Gliedern a_0 der transformirten Gleichung Zahlen mit vier Dezimalstellen. Da es Absicht war, in diesen Gliedern nicht mehr als vier Dezimalstellen in Anwendung zu bringen; so konnte bei der Berechnung der späteren Ziffern der Wurzel die abgekürzte Multiplikation angewendet werden, und zu diesem Ende war es nöthig, so zu operiren, dass sich in den letzten Gliedern immer vier Dezimalstellen als richtig verbürgen liessen.

Demnach wird bei der Multiplikation mit der fünften Ziffer 1 oder $r'''' = 0{,}01$ schon das zweite Glied a_3 der transformirten Gleichung nicht mehr berechnet; es wird vielmehr von diesem Gliede 193,2 eine Stelle nach der anderen abgeschnitten, wodurch sich für das dritte und vierte Glied a_2 und a_1 abgekürzte Zahlen ergeben.

Bei der Multiplikation mit der sechsten Ziffer 6 braucht das dritte Glied a_2 der transformirten Gleichung nicht mehr berechnet zu werden; es werden vielmehr von diesem Gliede 836 nachundnach die letzten Stellen abgeschnitten, was wiederum zu abgekürzten Zahlen für das vierte Glied a_1 führt.

Bei der Multiplikation mit der siebenten Ziffer 6 kommt nur noch einmal die erste Stelle 8 des dritten Gliedes in Betracht. Späterhin reduzirt sich die ganze Operation auf die Multiplikation des immer um eine Stelle kürzer werdenden vierten Gliedes.

Die letzte Ziffer 2 ist zweifelhaft und kann sich auf 1 reduziren, da die letzte Ziffer des letzten Gliedes a_0 sich möglicherweise um eine Einheit vermindern kann.

4. Es leuchtet ein, dass nach der Hornerschen Methode auch sehr bequem jede höhere Wurzel aus einer Zahl gezogen werden kann. Um z. B. $\sqrt[3]{15000000}$ zu bestimmen, ist die Gleichung

$$x^3 - 15000000 = 0$$

aufzulösen. Man findet leicht, dass die einzige reelle Wurzel zwischen 200 und 300 liegt, und hat demnach folgende Rechnung, bei welcher

die Abkürzung so gehalten ist, dass Dezimalstellen in den einzelnen Gliedern gar nicht beachtet werden sollen.

1	0	0	— 15000000	$200 = r$
	200	40000	8000000	
1	200	40000	— 7000000	$40 = r'$
	200	80000	5824000	
1	400	120000	— 1176000	$6 = r''$
	200	25600	1062936	
1	600	145600	— 113064	$0{,}6 = r'''$
	40	27200	109195	
1	640	172800	— 3869	0,02
	40	4356	3649	
1	680	177156	— 220	0,001
	40	4392	182	
1	720	181548	— 38	0,0002
	6	443	36	
1	726	18199|1	— 2	0,00001
	6	44 .	2	
1	732	1824|3 .	0	
	6	182|4 . .		
1	7|3|8	18|2 . . .		
		1|8		

Die Wurzel $x = 246{,}6212(1)$ ergiebt sich also auf acht Stellen genau, wovon die letzte zweifelhaft sein könnte, im vorliegenden Falle aber genau ist.

5. Selbst die Ausziehung der Quadratwurzel lässt sich nach der Hörnerschen Methode leichter als nach jeder anderen bewirken. So hat man z. B. zur Berechnung von $\sqrt{5}$ oder der Wurzel von $x^2 - 5 = 0$, welche zwischen 2 und 3 liegt,

1 0	— 5	$2 = r$
2	4	
1 2	— 1	0,2
2	0,84	
1 4	— 0,16	0,03
0,2	0,1329	
1 4,2	— 0,0271	0,006
0,2	0,026796	
1 4,4	0,000304	0,0000
0,03	0	
1 4,43	— 0,00030400	0,00006
0,03	26832	
1 4,46	— 3568	0,000007
0,006	3130	
1 4,466	— 438	0,0000009
0,006	402	
1 4,472	— 36	0,0000000(8)
1 4,472|0		
1 4,47|2.	— 1	
1 4,4|7..		
1 4,|4...		
1 4,....		

Hiernach ist $x = 2{,}2360679(8)$.

6. Um die unter Nr. 2 bezeichneten ungewöhnlichen Fälle an einem Beispiele zu erläutern; so bemerken wir, dass die unter Nr. 3 behandelte Gleichung ausser der Wurzel 126,31... auch die Wurzel 186,31... hat. Durch die Vorbereitungsrechnungen erfährt man also, dass zwei Wurzeln jener Gleichung zwischen 100 und 200 liegen. Wenn man hiernach die Auflösung mit $r = 100$ beginnt; so wird die erste transformirte Gleichung wie vorhin

$$x'^4 + 88x'^3 - 10263x'^2 - 677726x' + 22859760 = 0$$

also die Näherungsformel (4)

$$x' = \frac{22859760}{677726}$$

Die Näherungsformel lässt allerdings nur den Werth $r' = 30$ erkennen, welcher durch die genaue Formel auf $r' = 20$ korrigirt wird, indem $x' = 20$ ein positives und $x' = 30$ ein negatives Resultat giebt. Dieser Werth $r' = 20$ ergiebt die unter Nr. 3 berechnete Wurzel.

Ausserdem lehrt aber die vorstehende transformirte Gleichung, dass noch ein höherer Werth von r' zulässig ist, indem dieselbe für $r' = 80$ ein negatives und für $r' = 90$ ein positives Resultat liefert. Folglich ist auch $r' = 80$ ein gültiger Werth, und für diesen Werth muss das bekannte Glied der nächsten transformirten Gleichung das Zeichen wechseln, also negativ werden, da es bisher positiv war. Diess geschieht in der That, indem sich die Rechnung jetzt folgendermassen fortsetzt.

1	88	— 10263	— 677726	22859760	($80 = r'$
	80	13440	254160	— 33885280	
1	168	3177	— 423566	— 1025520	
	80	19840	1841360		
1	248	23017	1417794		
	80	26240			
1	328	49257			
	80				
1	408				

Man hat zunächst das erwartete negative Glied — 1025520, und die Fortsetzung liefert die Wurzel 186,316665178.

7. Ein zweites Beispiel dieser Art bietet die Gleichung

$$46960\,x^2 - 307668\,x + 503794 = 0$$

dar, deren beide Wurzeln zwischen 3 und 4 liegen, und für deren erste 3,2205... man folgende Rechnung hat.

46960	— 307668	503794	($r = 3$
	140880	— 500364	
46960	— 166788	3430	($r' = 0{,}2$
	140880	— 3303,2	
46960	— 25908	126,8	
	9392		
46960	— 16516		
	9392		
46960	— 7124		

Die erste transformirte Gleichung ist also

$$46960\,x'^2 - 25908\,x' + 3430 = 0$$

folglich abgekürzt

$$x' = \frac{-3430}{-25908}$$

Diese Näherungsformel giebt zuerst $r' = 0{,}1$, welcher Werth durch die genaue Formel auf den vorstehend schon angewandten Werth $r' = 0{,}2$ korrigirt wird.

Setzt man ausserdem in die genaue Formel $r' = 0{,}3$ und $r' = 0{,}4$; so erhält man nochmals einen Zeichenwechsel. Man hat also noch $r' = 0{,}3$ zu setzen und einen Zeichenwechsel des bekannten Gliedes, welches jetzt negativ werden muss, zu erwarten. In der That giebt die Annahme $r' = 0{,}3$

46960	— 25908	3430	($r' = 0{,}3$
	14088	— 3546	
46960	— 11820	— 116	
	14088		
46960	2268		

§. 8.

Die Anwendung der Regula falsi auf die Berechnung der Wurzeln einer Gleichung.

1. Nach der in den mathematischen Lehrbüchern enthaltenen Vorschrift über die Anwendung der Regula falsi zur Berechnung der Wurzel einer Gleichung wird ausdrücklich vorausgesetzt, dass x_1 und x_2 zwei genäherte Werthe von x in der Gleichung $y = f(x) = 0$ seien. Wenn Diess der Fall ist; so wird die Grösse x_3, welche durch einen der nachstehenden Ausdrücke

$$x_3 = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_1 - y_2} = x_1 + \frac{(x_2 - x_1) y_1}{y_1 - y_2} = x_2 + \frac{(x_2 - x_1) y_2}{y_1 - y_2}$$

bestimmt ist, noch näher an dem gesuchten Werthe von x liegen, als x_1 und x_2. Hierbei werden alle Grössen x_1, x_2, y_1, y_2 mit den ihnen zukommenden Zeichen genommen.

Liegt also x_2 näher an x als x_1, oder liegt y_2 näher an null als y_1; so wird x_3 näher an x liegen als x_2, oder y_3 näher an null als y_2.

Unter nochmaliger Anwendung derselben Formel auf x_2 und x_3 lässt sich dann ein noch näherer Werth x_4 berechnen u. s. w. Eine Vergleichung solcher zwei zuletzt berechneten Werthe, z. B. x_3 und x_4, von welchen der eine grösser und der andere kleiner als x ist, für welche also y_3 und y_4 entgegengesetzte Zeichen annehmen, giebt zu erkennen, auf wieviel Dezimalstellen der letzte Werth als genau zu betrachten ist.

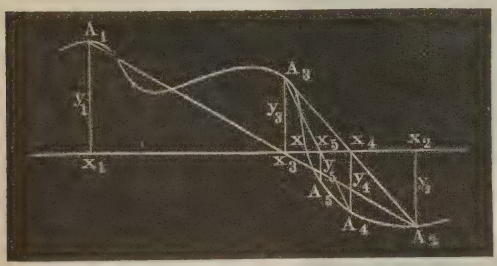
In ihrer Anwendung auf die algebraischen Gleichungen steht zwar die Regula falsi, obgleich sie häufig eine raschere Annäherung an den gesuchten Werth von x gestattet, in Beziehung auf Bequemlichkeit der Hornerschen Methode nach, weil letztere immer nur ganz einfache Operationen mit einziffrigen Zahlen erfordert und mit aller Sicherheit eine Stelle der gesuchten Grösse nach der andern ergiebt:

gleichwohl ist die Regula falsi für gewisse Fälle, namentlich für transzendente Gleichungen von Interesse. Mit Rücksicht auf solche Fälle, namentlich aber in einer allgemeinen, weiter unten zu erörternden Beziehung ist es daher wichtig zu bemerken, dass die Regula falsi nicht auf die obige Bedingung eingeschränkt ist, dass die Ausgangswerthe x_1 und x_2 schon Näherungswerthe von x seien.

2. Man kann vielmehr die Behauptung aussprechen, dass wenn zwischen den Grössen x_1 und x_2 ein oder überhaupt eine unpaare Menge von Werthen der Wurzel x liegen, wovon also y_1 und y_2 entgegengesetzte Zeichen haben, die obige Regel immer anwendbar ist und bei fortgesetzter Anwendung stets auf einen Werth von x führen muss, wenn man nur jeden nach der obigen Formel berechneten neuen Werth x_3 mit demjenigen der beiden vorhergehenden Werthe x_1, x_2 kombinirt, für welchen y das entgegengesetzte Zeichen annimmt, gleichviel ob $x_1, x_2, x_3 \ldots$ eigentliche Näherungswerthe von x sind oder nicht.

Die Richtigkeit dieser Behauptung lässt sich am raschesten durch die graphische Darstellung übersehen. In Fig. 1 sind die Werthe von $y = f(x)$ als die Ordinaten einer Kurve dargestellt, welchen x als Abszisse angehört. Die Regula falsi setzt nun für x_3 diejenige Abszisse, welche dem Durchschnittspunkte der vom Endpunkte der Ordinate y_1 nach dem Endpunkte der Ordinate y_2 gezogenen geraden Linie $A_1 A_2$ mit der Abszissenaxe entspricht. Liegen A_1 und A_2 auf entgegengesetzten Seiten der Axe; so wird y_3 immer das entgegengesetzte Zeichen entweder von y_1 oder von y_2 haben. In unserer Figur haben y_2 und y_3 entgegengesetzte Zeichen. Kombinirt man also diese beiden Ordinaten; so erhält man y_4, welche Ordinate hier das entgegengesetzte Zeichen von y_3 hat und damit zu kombiniren ist. Hierdurch erhält man x_5, deren Ordinate y_5 wiederum mit y_3 (nicht mit y_4) zu kombiniren ist.

Fig. 1.



Es leuchtet ein, dass man sich durch dieses Verfahren schliesslich dem Werthe von x mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit nähern muss, selbst wenn einzelne der früheren Werthe $x_1, x_2, x_3 \ldots$ nicht eine Annäherung, sondern eine Entfernung von jenem Werthe enthalten sollten.

3. Wenn man im Verlauf des eben erörterten Verfahrens in der Reihe $A_1, A_2, A_3 \ldots$ zwei aufeinander folgende Punkte erreicht, zwischen welchen die Kurve ganz konvex oder ganz konkav ist, zwischen

welchen also die zweite derivirte Funktion

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x)$$

ihr Zeichen nicht mehr ändert, vielmehr bei konvexen Kurventheilen stets positiv und bei konkaven stets negativ bleibt; so wird dieser Zustand irgend einem der in Fig. 2 bis 5 dargestellten vier Fälle angehören. Das Charakteristische aller dieser Fälle ist, dass bei den späteren Näherungsoperationen die dem Punkte A angehörige Abszisse und Ordinate unverändert bleibt und der Punkt A_1 mit seinen Koordinaten x_1, y_1 dem gesuchten Durchschnittspunkte der Kurve mit der Axe allein sich nähert. In Fig. 2 und 3 wächst der Werth von x_1 fortwährend, in Fig. 4 und 5 nimmt derselbe unaufhörlich ab. In den ersten beiden Fällen hat die dem zuletzt bestimmten Punkte A_1 angehörige Ordinate y_1 das entgegengesetzte Zeichen der goniometrischen Tangente y' des Neigungswinkels α der Berührungslinie an A, also das entgegengesetzte Zeichen der ersten derivirten Funktion

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = tang\,\alpha,$$

welche der Abszisse x_1 angehört; in den letzten beiden Fällen dagegen haben y_1 und y' gleiche Zeichen.

Fig. 2.

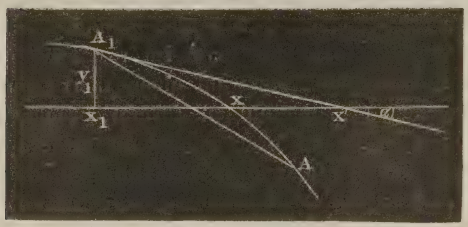


Fig. 3.

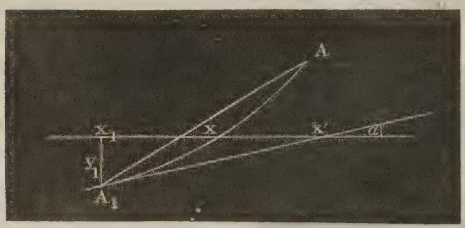


Fig. 4.

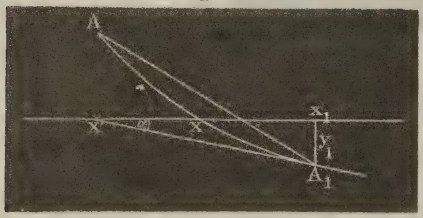
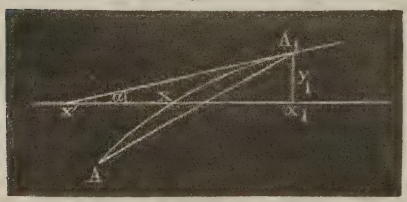


Fig. 5.



In allen Fällen aber ist der absolute Werth

des Fehlers, um welchen sich der Näherungswerth x_1 von dem wahren Werthe x unterscheidet, also $x - x_1$ oder $x_1 - x$ kleiner als der absolute Werth der Grösse

$$\frac{y_1}{tang\,\alpha} = \frac{y_1}{y'_1} = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

indem diese Grösse den Werth der Subtangente $x_1 - x'$ oder $x' - x_1$ für den Punkt A_1 darstellt.

Die letztere Relation liefert daher einen Massstab für den Näherungsgrad oder die Fehlergrenze des Werthes x_1.

Um die vorstehende Bestimmung der Fehlergrenze anwenden zu können, braucht die Kurve vom Punkte A_1 aus nicht nothwendig bis zum Punkte A, sondern nur bis zum Durchschnitte mit der Axe ganz konvex oder ganz konkav oder überhaupt nur so gekrümmt zu sein, dass sie den Durchschnittspunkt der an A_1 gelegten Tangente mit der Axe nicht überschreitet. Lässt sich die Existenz einer solchen Krümmung aus anderen Momenten konstatiren; so kann man die Fehlergrenze immer nach der obigen Formel bestimmen.

4. Wendet man beispielsweise die Regula falsi zur Berechnung der zwischen 120 und 130 liegenden Wurzel der in §. 7 behandelten Gleichung

$$x^4 - 312\,x^3 + 23337\,x^2 + 14874\,x + 2360 = 0$$

an; so hat man

$$x_1 = 120 \quad y_1 = \quad 6064040$$
$$x_2 = 130 \quad y_2 = -\,3522720$$

also

$$x_3 = 130 + \frac{(130 - 120)\,(-\,3522720)}{6064040 + 3522720} = 126{,}325599$$

Nimmt man

$$x_3 = 126{,}32 \quad y_3 = -\,3088{,}18$$

so würde man nach der gewöhnlichen Regel jetzt x_3 mit x_2 kombiniren, was

$$x_4 = 126{,}32 + \frac{(126{,}32 - 130)\,(-\,3088{,}18)}{-\,3522720 + 3088{,}18} = 126{,}316772$$

ergiebt.

Nach unserer letzteren Regel hat man dagegen x_3 mit x_1 zu kombiniren, weil y_3 und y_1 entgegengesetzte Zeichen haben. Diess giebt

$$x_4 = 126{,}32 + \frac{(126{,}32 - 120)\,(-\,3088{,}18)}{6064040 + 3088{,}18} = 126{,}316783$$

Nimmt man

$$x_4 = 126{,}3167 \quad y_4 = -\,34{,}1562$$

so ist der Fehler, weil hier die erste derivirte Funktion

$$f'(x) = 4\,x^3 - 936\,x^2 + 46674\,x + 14874$$

für $x_4 = 126{,}3167$ den Werth $f(x_4) = 174690$ liefert, jedenfalls kleiner als

$$\frac{34{,}1562}{174690} = 0{,}000196$$

Der wahre Werth von x liegt also zwischen 126,3167 und 126,316504. In der That ist dieser Werth im vorhergehenden Paragraphen gleich 126,316664 gefunden.

5. Wenn die Kurve zwischen den beiden Punkten A, A_1, welchen die beiden Grenzwerthe x_0, x_1 der Wurzel x angehören mögen, ganz konvex oder ganz konkav ist (ein Fall, welcher nach den Operationen des nächstfolgenden Paragraphen stets vorausgesetzt werden kann); so bleiben bei der in Nr. 2 bezeichneten Anwendung der Regula falsi die Koordinaten x_0, y_0 des einen Punktes A fortwährend unverändert, und es ändern sich nur die Koordinaten des anderen Punktes.

Dieser unveränderliche Punkt A hat die aus Fig. 2, 3, 4, 5 ersichtliche Lage. Er liegt nach Fig. 4 und 5 links, d. h. x_0 ist kleiner als jeder später zu berechnende Näherungswerth $x_1, x_2, x_3 \ldots$, wenn y_0 und y'_0 entgegengesetzte Zeichen haben, und er liegt nach Fig. 2 und 3 rechts, d. h. x_0 ist grösser als jeder spätere Näherungswerth $x_1, x_2, x_3 \ldots$, wenn y_0 und y'_0 gleiche Zeichen haben.

Im ersten Falle kann also der aus x_0, y_0, x_1, y_1 zuerst zu berechnende Näherungswerth x_2 in die Form

$$x_2 = x_0 + \frac{(x_1 - x_0)\, y_0}{y_0 - y_1} = x_0 + \frac{x_1 - x_0}{1 - \frac{y_1}{y_0}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

im zweiten Falle dagegen in die Form

$$x_2 = x_0 - \frac{(x_0 - x_1)\, y_0}{y_0 - y_1} = x_0 - \frac{x_0 - x_1}{1 - \frac{y_1}{y_0}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

gestellt werden. In Gl. (1) ist dann $x_1 - x_0$, in Gl. (2) dagegen $x_0 - x_1$ stets eine entschieden positive Grösse. In beiden Gleichungen aber haben y_0 und y_1 entgegengesetzte Zeichen; es ist also $-\frac{y_1}{y_0}$ entschieden positiv und $1 - \frac{y_1}{y_0} > 1$.

Schreiben wir daher für beide Fälle

$$x_2 = x_0 + (x_1 - x_0)\, \frac{y_0}{y_0 - y_1} = x_0 + \frac{x_1 - x_0}{1 - \frac{y_1}{y_0}} \quad . \quad . \quad (3)$$

welche Formel für beide Fälle gilt, indem im ersten Falle $x_1 - x_0$ positiv, im zweiten dagegen negativ ist.

Da jeder neue Näherungswerth immer mit x_0 zu kombiniren ist; so hat man

$$x_3 = x_0 + (x_2 - x_0)\frac{y_0}{y_0 - y_2}$$

$$x_4 = x_0 + (x_3 - x_0)\frac{y_0}{y_0 - y_3}$$

u. s. w. oder wenn man bei jedem folgenden Werthe die vorhergehenden berücksichtigt,

$$x_3 = x_0 + (x_1 - x_0)\left(\frac{y_0}{y_0 - y_1}\right)\left(\frac{y_0}{y_0 - y_2}\right) = x_0 + \frac{x_1 - x_0}{\left(1 - \frac{y_1}{y_0}\right)\left(1 - \frac{y_2}{y_0}\right)} \quad (4)$$

$$x_4 = x_0 + (x_1 - x_0)\left(\frac{y_0}{y_0 - y_1}\right)\left(\frac{y_0}{y_0 - y_2}\right)\left(\frac{y_0}{y_0 - y_3}\right)$$

$$= x_0 + \frac{x_1 - x_0}{\left(1 - \frac{y_1}{y_0}\right)\left(1 - \frac{y_2}{y_0}\right)\left(1 - \frac{y_3}{y_0}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

u. s. w.

Man sieht, in diesen Ausdrücken für die späteren Näherungswerthe ändert sich Nichts weiter, als der Koeffizient, resp. Nenner des zweiten Gliedes, und auch dieser nur in der Weise, dass er sukzessive um einen Faktor nach dem andern wächst.

Die Rechnung nach diesen Formeln lässt sich zwar durch verschiedene Massregeln wesentlich vereinfachen. Immer bleibt sie aber mühsamer als die Hornersche Methode. Demnach bin ich auch weit davon entfernt, das vorstehende Verfahren zum gewöhnlichen Gebrauche zu empfehlen. Dasselbe hat vielmehr nur ein allgemeines wissenschaftliches Interesse, welches man erst in §. 10 vollständiger würdigen wird. Im Übrigen können, wie man später sehen wird, Fälle vorkommen, wo sich dieses Verfahren mit Nutzen auch praktisch anwenden lässt; namentlich gilt Diess von transzendenten Gleichungen.

§. 9.

Geometrische Darstellung einer Gleichung und ihrer Derivirten.

Sieht man x als Abszisse und eine Funktion von x als Ordinate einer Kurve an; so bezeichnen die Durchschnittspunkte der Kurve

I, $y = f(x)$

mit der Abszissenaxe die reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$

Die Funktion I steht zu ihrer ersten Derivirten

II, $y' = f'(x)$

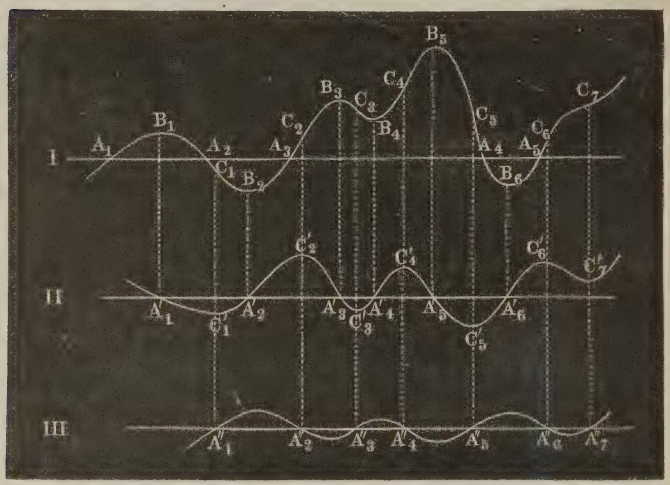
und zu ihrer zweiten Derivirten

III, $y'' = f''(x)$

in folgenden Beziehungen.

In Fig. 6 stelle die obere Kurve die gegebene Gleichung I, die

Fig. 6.



mittlere Kurve die erste derivirte Gleichung II und die untere Kurve die zweite derivirte Gleichung III dar.

Alsdann sind für jede Abszisse x die Ordinaten von II die goniometrischen Tangenten der Neigungswinkel der Berührungslinien von I, weil $y' = \frac{dy}{dx}$ ist. Die Kulminationspunkte $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ von I, in welchen also die Kurve I horizontal ist, entsprechen mithin ebenso viel Durchschnittspunkten $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, A'_5, A'_6$ der Kurve II mit der Axe.

Die erste derivirte Gleichung II hat also genau so viel reelle Wurzeln, als die gegebene Gleichung I Kulminationspunkte.

Jedem Wendepunkte $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7$ von I entspricht in II ein Kulminationspunkt $C'_1, C'_2, C'_3, C'_4, C'_5, C'_6, C'_7$ mit horizontaler Tangente, weil für einen solchen Punkt in I $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, also $\frac{dy'}{dx} = 0$, mithin die Ordinate y' in II ein Maximum oder Minimum sein muss.

Da nun jedem Kulminationspunkte $C_1, C_2, C_3 \ldots$ in II ein Durchschnittspunkt $A''_1, A''_2, A''_3 \ldots$ in der Gleichung III, welche

als zweite Derivirte von I zugleich die erste Derivirte von II ist, entspricht; so korrespondirt mit jedem Wendepunkte in I ein Durchschnittspunkt in III.

Die zweite derivirte Gleichung III hat also genau so viele reelle Wurzeln, als die gegebene Gleichung I Wendepunkte oder die erste Derivirte Kulminationspunkte.

Die Ordinaten der zweiten derivirten Gleichung III charakterisiren die Krümmung der gegebenen Gleichung dergestalt, dass allen positiven Ordinaten von III eine konvexe Krümmung in I (von unten gesehen) und allen negativen Ordinaten von III eine konkave Krümmung in I (ebenfalls von unten gesehen) entspricht. Zwischen je zwei Durchschnittspunkten A''_1, A''_2, A''_3 ... von III liegen also abwechselnd die konvexen und konkaven Theile der Kurve I. So ist der links von A''_1 liegende Theil $C_1 B_1 A_1$ ... der Kurve I konkav, der über $A''_1 A''_2$ liegende Theil $C_1 C_2$ konvex, der über $A''_2 A''_3$ liegende Theil $C_2 C_3$ konkav, u. s. w., schliesslich der rechts von A''_7 liegende Theil C_7 ... konvex.

Bei allen rationalen algebraischen Gleichungen von der Form

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

in welchen das höchste Glied einen positiven Faktor a_n hat, muss von einem gewissen Punkte C_3 an der ganze rechts liegende, ins Unendliche sich erstreckende Schenkel konvex werden und sich schliesslich über die Abszissenaxe erheben. Dasselbe gilt von allen derivirten Gleichungen II, III u. s. w.

Was den linksseitigen unendlichen Schenkel betrifft, in welchem $x = -\infty$ wird; so hat man zu unterscheiden, ob der Grad der Gleichung I paar oder unpaar ist. Bei paarem Grade ist der unendliche Schenkel links in der gegebenen, sowie in der zweiten, vierten, sechsten ... derivirten Gleichung konvex und erhebt sich zuletzt über die Abszissenaxe; dagegen ist derselbe in der ersten, dritten, fünften ... derivirten Gleichung konkav und senkt sich zuletzt unter die Axe. Bei unpaarem Grade findet das Umgekehrte statt, dass sich nämlich der linke Schenkel der gegebenen, der zweiten, vierten, sechsten ... derivirten Gleichung (wie in Fig. 6) mit konkaver Krümmung unter die Axe senkt, während er sich in der ersten, dritten, fünften ... derivirten Gleichung mit konvexer Krümmung über die Axe erhebt.

In allen Fällen findet beim Übergange von einer Gleichung zu der nächstfolgenden in der Reihe I, II, III ... in dem linksseitigen unendlichen Schenkel ein fortwährender Wechsel zwischen Konvexität und Konkavität, Erhebung über die Axe und Senkung unter die Axe statt, während im rechtsseitigen Schenkel stets Konvexität mit Erhebung über die Axe bestehen bleibt.

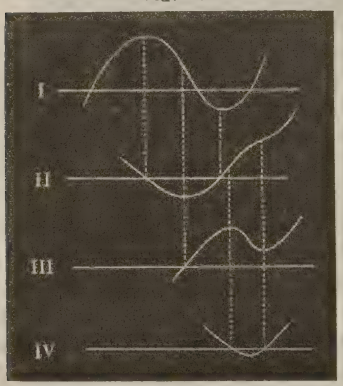
In Folge dieses Wechsels geht bei jeder nächstfolgenden derivirten Gleichung in der Reihe I, II, III, IV ... (deren Grad immer

um eine Einheit niedriger ist) ein Durchschnittspunkt mit der Axe verloren. Von den übrigen Durchschnittspunkten der vorhergehenden Gleichung geht keiner verloren. Möglicherweise können aber in der nächstfolgenden Gleichung eine paare Anzahl neuer Durchschnittspunkte dann entstehen, wenn die vorhergehende Partien wie C_3 B_4 C_4 enthält, in welchen ein Paar Wendepunkte mit einem Kulminationspunkte ohne ein korrespondirendes Paar von Durchschnittspunkten vorkommen.

Man sieht also, dass bei dem Fortschritte in der Reihe I, II, III ... alle Kulminationspunkte zu Durchschnittspunkten, und alle Wendepunkte zu Kulminationspunkten führen, dass auch bei der Betrachtung dieses Verwandlungsprozesses in umgekehrter Reihenfolge jedem Durchschnittspunkte ein Kulminationspunkte und jedem Kulminationspunkt ein Wendepunkt nothwendig vorangegangen sein muss.

Soll demnach in einer späteren Kurve ein Paar neuer Durchschnittspunkte entstehen, welche nicht schon aus dem Krümmungswechsel der gegebenen Kurve I geschlossen werden können; so muss sich in der zunächst vorhergehenden Kurve erst ein Paar neuer Kulminationspunkte ohne Durchschnittspunkt und in der zuzweit vorhergehenden ein Paar neuer Wendepunkte ohne Kulminationspunkte erzeugt haben, welchem letzteren Paare in der zudritt vorhergehenden Kurve kein Krümmungswechsel entspricht. Ein solcher Vorgang ist z. B. in Fig. 7 dargestellt.

Fig. 7.



Wenn die Kurve I die Axe in A berührt; so ist die Abszisse x dieses Punktes eine vielfache Wurzel der gegebenen Gleichung. Wievielmal diese Wurzel als gleiche Wurzel in der Gleichung vorkommt, ist aus den folgenden derivirten Kurven zu ersehen. Ist nämlich der korrespondirende Punkt A' in der ersten derivirten Gleichung II ein Durchschnittspunkt, wie in Fig. 8; so ist x eine zweifache Wurzel. Ist A' in II ein Berührungspunkt und A'' in III ein Durchschnittspunkt wie in Fig. 9; so ist x eine dreifache Wurzel. Ist A' in II und A'' in III ein Berührungspunkt, aber A''' in IV ein Durchschnittspunkt, wie in Fig. 10; so ist x eine vierfache Wurzel u. s. w.

Allgemein ist x eine $m$fache Wurzel, wenn sie gleichzeitig eine Wurzel der $m$ersten Gleichungen I, II, III . . ., also eine Wurzel der gegebenen und der $(m-1)$ ersten derivirten Gleichungen ist.

Die $(n-1)$ste derivirte Gleichung ist vom ersten Grade; dieselbe stellt also eine gerade Linie mit einem Durchschnittspunkte dar.

Die $(n-2)$te derivirte Gleichung ist vom zweiten Grade und stellt eine Parabel dar, deren Scheitel über dem Durchschnittspunkte der

Fig. 8.

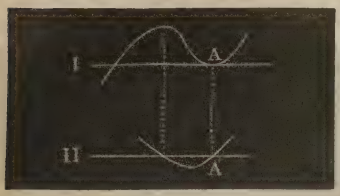


Fig. 9.

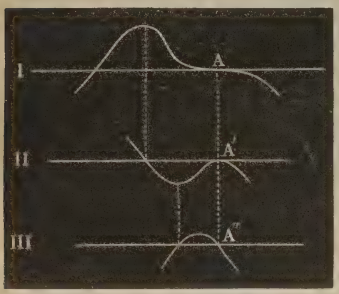
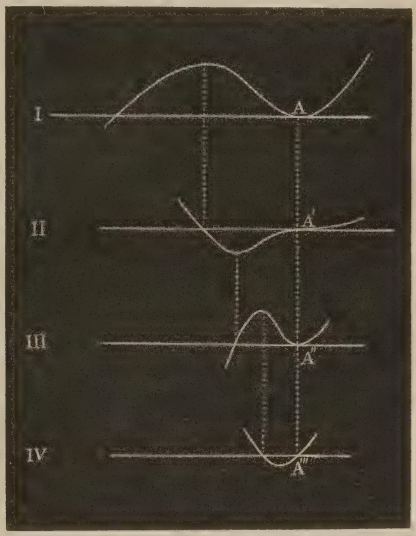


Fig. 10.



eben erwähnten geraden Linie liegt, und welche die Axe entweder zweimal oder gar nicht schneidet.

Die $(n-3)$te derivirte Gleichung ist vom dritten Grade und hat stets einen Wendepunkt, welcher über dem Scheitel der eben genannten Parabel und dem Durchschnittspunkte der vorher bezeichneten geraden Linie liegt.

Hat die Parabel zwei Durchschnitte; so hat die Kurve dritten Grades jedenfalls zwei Kulminationspunkte: sie kann aber drei oder einen Durchschnittspunkt haben, jenachdem die Axe die Lage (1) oder die Lage (2) oder (3) in Fig. 11 (a. f. S.) hat.

Hat die Parabel keinen Durchschnitt; so hat die Kurve dritten Grades auch keinen Kulminationspunkt und stets nur einen Durchschnittspunkt, wie in Fig. 12 dargestellt ist.

Aus Vorstehendem ergeben sich evident folgende Sätze.

Wenn die gegebene Gleichung $n$ten Grades n reelle Wurzeln (Durchschnitte) hat; so hat auch jede derivirte Gleichung lauter reelle Wurzeln, nämlich die erste $n-1$, die zweite $n-2$ u. s. w.

Für jede komplexe Wurzel der gegebenen Gleichung muss in den n Kurven I, II, III... an irgend einer Stelle ein Kulmi-

nationspunkt vorkommen, welchem kein Durchschnitt mit der Axe der betreffenden Kurve entspricht, oder was damit gleichbedeutend ist, für jedes Paar komplexer Wurzeln muss in jenen

Fig. 11.

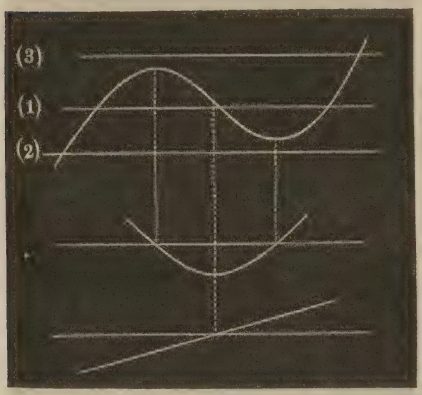
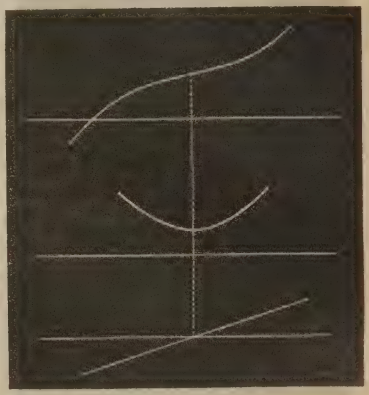


Fig. 12.



Kurven ein Paar benachbarter Kulminationspunkte vorkommen, welche auf derselben Seite der Axe der betreffenden Kurve liegen. So bedingen in Fig. 6 die Kulminationspunkte B_3, B_4 ein Paar und auch die Kulminationspunkte C'_6, C'_7 ein Paar komplexer Wurzeln.

§. 10.

Direkte Auflösung einer Gleichung ohne Versuchsrechnung.

1. Der Sturmsche Lehrsatz lässt zwar ganz sicher die Anzahl der reellen Wurzeln einer Gleichung erkennen: allein weder dieser, noch irgend ein anderer bis jetzt aufgestellter Lehrsatz macht es möglich, die einzelnen Wurzeln von einander zu trennen, d. h. zwei Grenzen anzugeben, zwischen welchen jede einzelne Wurzel liegt. Ohne vorgängige Trennung der Wurzeln kann aber keines der bekannten Verfahren zur Berechnung derselben angewandt werden. Die Auflösung einer Gleichung bleibt also immer noch von gewissen Versuchsrechnungen abhängig. Wenngleich diese Versuche durch rationelle Methoden, z. B. durch die Zuhülfenahme der Differenzenreihen und auf andere Weise, so sehr vereinfacht sind, dass sie in den meisten Fällen keine erheblichen Schwierigkeiten machen und wahrscheinlich praktischer sind, als irgend ein denkbares direktes Verfahren; so kann man doch nicht verkennen, dass ein von jedem Probiren unabhängiges Ver-

fahren einen besonderen wissenschaftlichen Werth hat. Dieser Werth, welcher in der absoluten Strenge und Allgemeinheit liegt, kann sogar zu einer praktischen Bedeutung gelangen, wenn man sich Gleichungen mit ungemein grossen Koeffizienten und vielleicht sehr nahe zusammenliegenden Wurzeln denkt. Die Schwierigkeiten können hierbei so gross werden, dass die Versuchsrechnungen jedes Mass übersteigen, also umständlicher, als jedes direkte Verfahren, zuletzt aber sogar unausführbar werden.

Ein ganz direktes Verfahren zur Bestimmung der reellen Wurzeln einer Gleichung geben die Betrachtungen des vorhergehenden Paragraphen an die Hand.

Zu diesem Ende erwäge man, dass wenn die reellen Wurzeln von irgend einer der Gleichungen I, II, III . . . z. B. von II bekannt sind, hierdurch die reellen Wurzeln der vorhergehenden Gleichung I sofort getrennt erscheinen. Denn sind nach Fig. 6

$x_1,\ x_2,\ x_3\ \ldots$ die den Punkten $A_1, A_2, A_3 \ldots$ entsprechenden reellen Wurzeln von $\mathrm{I} = f(x) = 0$

$x_1',\ x_2',\ x_3'\ \ldots$ „ „ „ $\mathrm{II} = f'(x) = 0$

$x_1'',\ x_2'',\ x_3''\ \ldots$ „ „ „ $\mathrm{III} = f''(x) = 0$

so liegt die Wurzel

x_1	zwischen	$-\infty$	und	x_1'
x_2	„	x_1'	„	x_2'
x_3	„	x_2'	„	x_3'
x_4	„	x_5'	„	x_6'
x_5	„	x_6'	„	$+\infty$

Zwischen x_3' und x_4', sowie zwischen x_4' und x_5' liegt keine Wurzel von I, weil die Substitution dieser Werthe in $f(x)$ drei Werthe von gleichem Zeichen giebt; dieser Umstand charakterisirt vielmehr ein Paar komplexer Wurzeln von I.

Um also die etwaigen komplexen Wurzeln zu erkennen, substituirt man die Werthe x_1', x_2', x_3' . . . der Wurzeln von II in I, bildet also die Grössen $f(x_1')$, $f(x_2')$, $f(x_3')$, welche hier, zusammengestellt mit den beiden Grössen $f(-\infty)$ und $f(+\infty)$,

$$f(-\infty) = -$$
$$f(x'_1) = +$$
$$f(x'_2) = -$$
$$f(x'_3) = +$$
$$f(x'_4) = +$$
$$f(x'_5) = +$$
$$f(x'_6) = -$$
$$f(+\infty) = +$$

ergeben und hierdurch die Anzahl und die Grenzen der 5 reellen Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 der Gleichung I, sowie das Vorhandensein eines komplexen Paares genau bezeichnen.

2. Wenn man zwei Grenzen einer Wurzel kennt, führt das in §. 8 Nr. 2 bezeichnete Näherungsverfahren mittelst der Regula falsi, ohne irgend eine Versuchsrechnung, zur Kenntniss der betreffenden Wurzel selbst. Hierbei haben wir im Interesse der Präzision des Verfahrens noch folgende zwei Bemerkungen zu machen.

Kennt man nicht bloss die Wurzeln $x'_1, x'_2 \ldots$ der Gleichung II, sondern auch die Wurzeln $x''_1, x''_2 \ldots$ von III; so bezeichnen die letzteren die Abszissen, für welche in der Kurve I die Krümmung zwischen Konvexität und Konkavität wechselt. Demnach ist es nicht unbedingt nöthig, behuf Berechnung der Wurzeln $x_1, x_2 \ldots$ nach §. 8 Nr. 2 nothwendig die Grenzen dieser Wurzeln aus den Werthen $x'_1, x'_2 \ldots$ zu entnehmen: man kann diese Grenzen vielmehr aus den Werthen $x'_1, x'_2 \ldots$ und $x''_1, x''_2 \ldots$ gemeinschaftlich und zwar dergestalt nehmen, dass das zwischen je zwei Grenzen liegende Kurvenstück ganz konvex oder ganz konkav ist.

Da in Fig. 6 der Grösse nach die Werthe x' und x'' von $-\infty$ nach $+\infty$ sich folgendermassen ordnen

$$-\infty \quad x'_1 \quad x''_1 \quad x'_2 \quad x''_2 \quad x'_3 \quad x''_3 \quad x'_4 \quad x''_4 \quad x'_5 \quad x'_6 \quad x''_6 \quad x''_7 \quad +\infty$$

und bei ihrer Substitution in $I = f(x)$ folgende Zeichenreihe

$$- \quad + \quad - \quad - \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad - \quad + \quad + \quad +$$

ergeben; so kann man folgende Grenzen

für	x_1	die Grenzen	$-\infty$	und	x'_1
„	x_2	„	„	x'_1	„	x''_1
„	x_3	„	„	x'_2	„	x''_2
„	x_4	„	„	x''_5	„	x'_6
„	x_5	„	„	x'_6	„	x''_6

annehmen.

Unter solchen Umständen ist in jedem Augenblicke die in §. 8 Nr 3 gelehrte Bestimmung der Fehlergrenze zulässig, sodass man es also

nicht mit einer Annäherung von unbestimmtem Werthe, sondern mit einer solchen zu thun hat, für welche man jederzeit den Grad der Genauigkeit bezeichnen kann.

Die zweite Bemerkung, welche wir noch zu machen haben, betrifft die niedrigste und die höchste Wurzel x_1 und x_5. Für keine von beiden ist es statthaft, bei der Anwendung der Regula falsi das unendlich Grosse $-\infty$ oder $+\infty$ als den einen Grenzwerth anzunehmen. Man muss also hierfür immer einen endlichen äussersten Grenzwerth ermitteln. In Figur 6 ergiebt sich derselbe für die höchste Wurzel x_5 schon durch den Werth x_6''. Für die niedrigste Wurzel x_1, welche in einem Kurvenschenkel liegt, der links von B_1 (oder vielmehr schon links von C_1) bis ins Unendliche konkav bleibt, findet sich ein solcher endlicher Grenzwerth unter den Grössen x_1'', x_2'' ... nicht. Übrigens ist ein solcher Werth, also irgend ein endlicher Werth $< x_1'$, für welchen $f(x)$ negativ wird, jederzeit leicht zu bestimmen, und nöthigenfalls kann Diess durch irgend einen der Sätze über die äussersten Grenzen der reellen Wurzeln aus §. 3 geschehen.

3. Aus dem Vorstehenden folgt, dass die Auflösung einer der Gleichungen I, II, III ... die direkte Auflösung der vorhergehenden Gleichung nach sich zieht. Beginnt man also mit der letzten Gleichung $f_{n-1}(x) = 0$, welche die $(n-1)$ste derivirte, also vom ersten Grade ist und demnach direkt gelöst werden kann; so ergeben sich sukzessive die Auflösungen aller vorhergehenden Gleichungen in ihren reellen Wurzeln und schliesslich die der gegebenen Gleichung I.

Aus §. 9 ist ferner klar, dass sich durch dieses Verfahren auch die etwa vorhandenen gleichen Wurzeln und ihre Vielfachheit ohne Weiteres ergeben, indem jeder Werth, der gleichzeitig als eine Wurzel der ersten m Gleichungen I, II, III ... erscheint, eine $m$fache Wurzel von I ist.

Zum Zweck der Trennung der Wurzeln in der Gleichung $n$ten Grades

$$\text{I, } a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

hat man also die Auflösung der $n-1$ Gleichungen niedrigerer Grade

$$\text{II, } n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + (n-2) a_{n-2} x^{n-3} + \ldots + 2 a_2 x + a_1 = 0$$

$$\text{III, } n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + (n-2)(n-3) a_{n-2} x^{n-4} + \ldots + 2 a_2 = 0$$

$$\vdots$$

$$[n(n-1)\ldots 1] a_n x^3 + [(n-1)(n-2)\ldots 3] a_{n-1} x^2 + [(n-2)(n-3)\ldots 2] a_{n-2} x + [(n-3)(n-4)\ldots 1] a_{n-3} = 0$$

$$[n(n-1)\ldots 3] a_n x^2 + [(n-1)(n-2)\ldots 2] a_{n-1} x + [(n-2)(n-3)\ldots 1] a_{n-2} = 0$$

$$[n(n-1)\ldots 2] a_n x + [(n-1)(n-2)\ldots 1] a_{n-1} = 0$$

zu bewirken. Wegen jenes Zweckes leuchtet ein, dass wenn man dieses Verfahren praktisch anwenden wollte, nicht immer eine genaue Berechnung der Wurzeln von II, III . . . erforderlich ist, dass vielmehr in vielen Fällen schon ziemlich entfernte Näherungswerthe zu dem gewünschten Ziele führen.

Ausserdem kann man die Lösung der letzten beiden Gleichungen ersten und zweiten Grades wegen der Uubedeutsamkeit der darauf zu verwendenden Mühe fast gar nicht mit in Anschlag bringen.

Schliesslich würde auch für eine praktische Verwendung durchaus kein Hinderniss vorliegen, sich bei der Auflösung der einzelnen Gleichungen, nachdem erst einmal die Trennung der Wurzeln stattgefunden hat, der Hornerschen Methode zu bedienen.

II.

Die reellen Wurzeln zweier algebraischen Gleichungen mit zwei Unbekannten.

§. 11.

Das gewöhnliche Eliminationsverfahren.

1. Wenn zwei algebraische rationale Gleichungen zwischen zwei Unbekannten x, y vom Grade m und vom Grade n gegeben sind; so lassen sich dieselben, geordnet nach der Grösse x, in folgende Form bringen

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \ldots + A_1 x + A_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \ldots + B_1 x + B_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Hierin sind die Koeffizienten A von der Form

$$\begin{aligned}
A_m &= a_0 \\
A_{m-1} &= b_1 y + b_0 \\
A_{m-2} &= c_2 y^2 + c_1 y + c_0 \\
&\vdots \\
A_1 &= r_{m-1} y^{m-1} + r_{m-2} y^{m-2} + \ldots + r_1 y + r_0 \\
A_0 &= s_m y^m + s_{m-1} y^{m-1} + \ldots + s_1 y + s_0
\end{aligned}$$

und die Koeffizienten B von der Form

$$\begin{aligned}
B_n &= \alpha_0 \\
B_{n-1} &= \beta_1 y + \beta_0 \\
B_{n-2} &= \gamma_2 y^2 + \gamma_1 y + \gamma_0 \\
&\vdots \\
B_1 &= \varrho_{n-1} y^{n-1} + \varrho_{n-2} y^{n-2} + \cdots + \varrho_1 y + \varrho_0 \\
B_0 &= \sigma_n y^n + \sigma_{n-1} y^{n-1} + \cdots + \sigma_1 y + \sigma_0
\end{aligned}$$

Um die Auflösung zu bewirken, um also die zusammengehörigen Paare der Werthe von x und y zu finden, welche den beiden Gleichungen (1) und (2) Genüge leisten, eliminirt man die Grösse x, indem man nach dem gewöhnlichen Verfahren das grösste gemeinschaftliche Mass von (1) und (2) sucht und den verbleibenden Rest, welcher nicht mehr die Grösse x, sondern nur noch die Grösse y enthält, gleich null setzt. Die Auflösung der hierdurch sich ergebenden Gleichung, welche wir kurz die Restgleichung nennen wollen, führt zur Kenntniss der gesuchten Werthe von y.

Setzt man hierauf das grösste gemeinschaftliche Mass, welches bei dem bekannten Divisionsverfahren der letzte Divisor ist und in der Regel nur die erste Potenz von x enthält, gleich null; so ergiebt eine Auflösung der hierdurch entstehenden Gleichung, welche wir die Massgleichung nennen wollen, die zugehörigen Werthe für x, sobald man darin nachundnach die für y gefundenen Werthe substituirt.

2. Bei dieser Operation sind übrigens mehrere besonderen Umstände sorgfältig zu berücksichtigen.

Wenn man nämlich bei dem obigen Divisionsverfahren zur Erleichterung der Rechnung an irgend einer Stelle aus einem Divisor oder aus einem Dividende einen y enthaltenden Faktor ausscheidet; so kann Diess zur Folge haben, dass dieser Faktor in der Rest- oder Massgleichung fehlt, dass also die Auflösung unvollständig wird.

Wenn man dagegen in einem Divisor oder einem Dividende einen y enthaltenden Faktor zusetzt, was in manchen Fällen wegen der nothwendigen Vermeidung gebrochener Funktionen von y durchaus erforderlich ist; so kann es kommen, dass dieser Faktor in der Rest- oder Massgleichung als fremder Faktor enthalten ist, dass man also ausser den Werthen von x und y, welche wirkliche Auflösungen sind, auch solche erhält, welche es nicht sind.

Wir werden sogleich das in solchen Fällen zu beobachtende Verfahren bezeichnen. Vorher jedoch müssen wir noch einiger anderen speziellen Fälle erwähnen.

3. Wenn nämlich (unter der Voraussetzung, dass bei der obigen Division keine Faktoren eingeführt oder gestrichen sind) aus dem ersten

Reste, aus welchem x verschwindet, gleichzeitig auch y verschwindet, und der Rest sich nicht vollständig annullirt, sondern eine konstante Grösse a darstellt; so ist die ganze Aufgabe unmöglich, weil unmöglich $a = 0$ sein kann.

Wäre aber der Rest in diesem Falle gleich null, sodass man als Restgleichung die identische Gleichung $0 = 0$ erhielte; so lehrte Diess, dass die Grösse y ganz willkürlich bliebe.

Nur wenn im Laufe des Divisionsverfahrens Faktoren gestrichen oder zugesetzt sind, modifiziren sich diese Resultate in einer weiter unten anzugebenden Weise.

4. Wenn ein aus der Restgleichung gefundener Werth von y die Massgleichung auf die identische Form $0 = 0$ reduzirt; so entspricht jenem Werthe von y jeder beliebige Werth von x.

Sind aber Faktoren eingeführt oder gestrichen; so ist noch eine besondere Untersuchung anzustellen.

5. Wenn man auf einen Rest stösst, aus welchem y, nicht aber x verschwunden ist; so bricht man die Operation hiermit ab. Der Plan der Rechnung ändert sich hierdurch nur in der Weise, dass die Restgleichung zur Bestimmung von x (statt von y) und die Massgleichung zur Bestimmung von y (statt von x) dient.

6. Wenn die Massgleichung in Beziehung zu der zu eliminirenden Grösse x (resp. y) vom ersten Grade ist; so entspricht jedem aus der Restgleichung gefundenen Werthe der anderen Unbekannten y (resp. x) nur ein einziger Werth von x (resp. y). Ist jene Gleichung jedoch von einem höheren Grade p; so entsprechen jedem Werthe der zweiten Unbekannten p Werthe der ersten.

§. 12.

Die wahre Restgleichung unter Berücksichtigung der bei der Elimination eingeführten oder ausgeschiedenen Faktoren.

1. Wenn von den beiden Gleichungen (1) und (2) des vorstehenden Paragraphen

$$A = 0$$
$$B = 0$$

zwischen welchen x eliminirt werden soll, die zweite in Beziehung zu x von niedrigerem, oder wenigstens nicht von höherem Grade ist, als die erste; so beginnt man die Division mit der Funktion B. Bezeichnet

man die entstehenden Reste mit R_1, R_2, R_3 . . . und die Quotienten mit Q_1, Q_2, Q_3 . . . , so erhält man folgendes Schema

$$\begin{array}{r|l|l} B & A & Q_1 \\ \hline R_1 & B & Q_2 \\ \hline R_2 & R_1 & Q_3 \\ \hline R_3 & R_2 & Q_4 \\ \hline & R_4 & \end{array}$$

also

$$\begin{aligned} A &= Q_1 B + R_1 \\ B &= Q_2 R_1 + R_2 \\ R_1 &= Q_3 R_2 + R_3 \\ R_2 &= Q_4 R_3 + R_4 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Angenommen, R_4 sei der erste Rest, in welchem die eine Unbekannte x verschwunden und nur noch die andere y enthalten ist, während der vorhergehende Divisor R_3 noch die beiden Unbekannten x und y zusammen enthält.

Sind keine y enthaltenden Faktoren zugesetzt oder ausgeschieden; so fordert die Bedingung $A = 0$, $B = 0$ offenbar, dass jeder Rest R_1, R_2, R_3, R_4 . . . $= 0$ sei, und umgekehrt, wenn zwei aufeinander folgende Reste wie z. B. R_4 und $R_3 = 0$ sind, würden auch alle vorhergehenden und zuletzt A und $B = 0$ sein. In solchem Falle ist also die Restgleichung zur Bestimmung von y

$$R_4 = 0$$

und die Massgleichung zur Bestimmung von x

$$R_3 = 0$$

Sind aber y enthaltende Faktoren zugesetzt oder gestrichen (die Zusetzung oder Streichung ganz bekannter Faktoren ist offenbar ohne Einfluss auf das Resultat); so hat man Folgendes zu beachten.

2. Wenn in irgend einem Divisor, z. B. in R_3, ein Faktor Y_3 ausgeschieden ist, wenn man also $R_3 = Y_3 R'_3$ hatte und statt dessen R'_3 setzt; so läuft Diess darauf hinaus, dass man statt des Systems der beiden benachbarten Gleichungen

$$\begin{aligned} R_2 &= 0 \\ R_3 &= Y_3 R'_3 = 0 \end{aligned}$$

das System

$$\begin{aligned} R_2 &= 0 \\ R'_3 &= 0 \end{aligned}$$

an die Stelle setzt, und dass die Rechnung das gemeinschaftliche Mass von R_2 und R'_3 anstatt von R_2 und $R_3 = Y_3 R'_3$ liefert.

Die aus der End- und Massgleichung gefundenen Werthe bleiben unter solchen Umständen vollkommen gültige Auflösungen. Es kann aber ausser diesen noch andere Auflösungen geben; denn R_3 wird nicht bloss $= 0$, wenn $R'_3 = 0$ ist, sondern auch wenn $Y_3 = 0$ ist. Daher sind die Auflösungen des Systems

$$R_2 = 0$$
$$Y_3 = 0$$

ebenfalls noch Auflösungen der gegebenen Gleichungen.

3. Wenn in irgend einem Dividende, z. B. in R_2, ein Faktor Y_2 zugesetzt werden musste, um im Quotienten lauter ganze Koeffizienten zu erhalten; wenn also $Y_2 R_2$ für R_2 gesetzt ist; so läuft Diess darauf hinaus, dass man statt des Systems der beiden benachbarten Gleichungen

$$R_2 = 0$$
$$R_3 = 0$$

das System

$$Y_2 R_2 = 0$$
$$R_3 = 0$$

an die Stelle setzt, und dass die Rechnung das gemeinschaftliche Mass von $Y_2 R_2$ und R_3 anstatt von R_2 und R_3 giebt.

Hätte nun das gefundene Mass mit dem zugesetzten Faktor Y_2 selbst kein gemeinschaftliches Mass; so würde ersteres immer das richtige sein. Nur im entgegengesetzten Falle, wenn also das gefundene Mass mit Y_2 ein gemeinschaftliches Mass hat, wenn also ein aus der Restgleichung gefundener Werth von y den Faktor $Y_2 = 0$ macht, ist dieser Werth in der Regel kein zulässiger Werth von y. Er würde es nur dann sein, wenn er auch den Rest $R_2 = 0$ machte, wenn also schon R_2 mit Y_2 ein gemeinschaftliches Mass hatte. Die zugehörigen Werthe von x liefert dann die Gleichung $R_3 = 0$.

4. Die Ausscheidung von Faktoren wie Y_3 macht also die Auflösung unvollständig und erfordert für jeden solchen Faktor noch die besondere Auflösung der Gleichungen $Y_3 = 0$, $R_2 = 0$.

Die Einführung von Faktoren wie Y_2 kann unzulässige Werthe von y erzeugen; jedoch nur dann; wenn Y_2 mit der linken Seite der Restgleichung ein gemeinschaftliches Mass hat. Ist also die Restgleichung

$$R_4 = 0$$

und Y_1, Y_2, Y_3 . . . die eingeführten Faktoren; so hat man zu ermitteln, ob irgend einer dieser Faktoren ein gemeinschaftliches Mass mit R_4 hat. Ist Diess nicht der Fall; so ist $R_4 = 0$ die wahre Restgleichung. Hat jedoch der eine oder der andere ein gemeinschaftliches Mass mit R_4; so ist derselbe aus R_4 auszuscheiden und der Quotient $R'_4 = 0$ zu setzen, welcher dann nur zulässige Werthe für y liefern kann. Ob nun ein

Werth von y, welcher irgend einen jener Faktoren Y_1, Y_2, Y_3 . . . auf null reduzirt, ein zulässiger Werth sei, was unter besonderen Umständen allerdings möglich ist, wird nach Nr. 3 entschieden.

Wenn Faktoren ausgeschieden sind, ist es denkar, dass die gegebenen Gleichungen Auflösungen haben, selbst wenn sich der letzte Rest auf eine konstante Zahl reduzirt.

5. Was den Grad der Restgleichung betrifft; so nehmen bei dem gewöhnlichen Divisionsverfahren die sukzessiv entstehenden Reste R_1, R_2, R_3 . . . folgende Form an, wobei vorausgesetzt ist, dass nach der bekannten Regel in jeden Dividend das Quadrat des Koeffizienten des ersten Gliedes des Divisors als fremder Faktor eingeführt sei und dass aus den Divisoren keine Faktoren ausgeschieden seien. Wir setzen $n \geqq m$ voraus und bezeichnen durch den Index an der symbolischen Grösse Y die Dimension der dadurch dargestellten Funktion von y.

Die beiden gegebenen Gleichungen sind

$$A = x^n + Y_1 x^{n-1} + Y_2 x^{n-2} + \ldots + Y_{n-1} x + Y_n$$
$$B = x^m + Y_1 x^{m-1} + Y_2 x^{m-2} + \ldots + Y_{m-1} x + Y_m$$

und die Reste

$$R_1 = Y_{n-m+1} x^{m-1} + \ldots + Y_n$$
$$R_2 = Y_{2(n-m)+1} x^{m-2} + \ldots + Y_{2(n-m)+m+2}$$
$$R_3 = Y_{5(n-m)+11} x^{m-3} + \ldots + Y_{5(n-m)+m+8}$$
$$R_4 = Y_{12(n-m)+28} x^{m-4} + \ldots + Y_{12(n-m)+m+24}$$
$$R_5 = Y_{29(n-m)+69} x^{m-5} + \ldots + Y_{29(n-m)+m+64}$$

etc.

Man erhält den Index von Y im ersten Gliede irgend eines Restes wie R_5, indem man den Index dieses Gliedes im vorhergehenden Reste R_4 verdoppelt, den Index desselben Gliedes in dem noch weiter zurückliegenden Reste R_3 hinzuaddirt und die Summe um 2 vermehrt. Der Index von Y im letzten Gliede, also die eigentliche Dimension des Restes, ist gleich dem eben erwähnten, plus dem Exponenten von x im ersten Gliede.

R_p stellt den letzten Rest dar, wenn der Exponent $m - p$ von x im ersten Gliede $= 0$, wenn also $p = m$ ist, d. h. man hat im Ganzen m Reste zu bilden und der letzte liefert die Restgleichung $R_m = 0$.

Hiernach ist der Grad der durch das gewöhnliche Divisionsverfahren sich ergebenden Restgleichung, mit Ausschluss spezieller Fälle, wo ein niedrigerer Grad eintreten kann, für verschiedene Werthe von m und n in nachstehender Tabelle verzeichnet.

	$m =$						
n	1	2	3	4	5	6	7
1	1	.	.	.	.	.	.
2	2	4	.	.	.	.	.
3	3	6	11	.	.	.	.
4	4	8	16	28	.	.	.
5	5	10	21	40	69	.	.
6	6	12	26	52	98	168	.
7	7	14	31	64	127	238	407

Man sieht, dass diese Zahlen so rasch wachsen, dass das Verfahren bald unausführbar wird. Bei zwei Gleichungen vom 7ten Grade hätte man eine Restgleichung vom 407ten Grade zu erwarten, deren Zahlenkoeffizienten eine unglaubliche Grösse annehmen.

Hiernach würde das obige Verfahren in seiner gewöhnlichen Ausführung eigentlich nur bei zwei Gleichungen anwendbar sein, von welchen die eine den zweiten Grad nicht übersteigt.

Schon wenn der Grad beider Gleichungen $=$ oder > 3 ist, lässt sich die Rechnung mit Ausnahme einiger speziellen Fälle von unvollständigen Gleichungen nicht mehr bewältigen. Um Diess an einem Beispiele zu zeigen, bemerke ich, dass die Elimination von x aus den beiden kubischen Gleichungen

$$x^3+(-2y+7)x^2+(y^2+2y+1)x+(-y^3-3y^2-2y-10)=0$$
$$x^3+(-y-5)x^2+(3y^2+y+3)x+(-y^3-2y^2-5y+7)=0$$

welche doch in der That mit sehr kleinen Koeffizienten behaftet sind, die Restgleichung vom 11ten Grade

$$-19y^{11}+622y^{10}-7236y^9+34795y^8-36062y^7-266994y^6$$
$$+228116y^5+350359y^4+2597833y^3+2984045y^2$$
$$-1609320y-4568112=0$$

ergiebt.

Unter solchen Umständen wäre es von der grössten praktischen Wichtigkeit, den Effekt der Einführung fremder Faktoren schon im Verlaufe der Division zu neutralisiren und überhaupt die Entstehung einer Restgleichung mit fremden Faktoren zu verhindern. Diess ist allerdings thunlich, und zwar dient hierzu die Wahrnehmung, dass ein quadratischer Faktor, welcher in irgend einen Dividend eingeführt ist, nicht im ersten, wohl aber im zweiten Reste als gemeinschaftlicher Faktor aller Glieder wieder erscheint, mithin an dieser Stelle wiederum ausgeschieden werden kann, sodass er dann

in dem zum Divisor werdenden Reste und überhaupt in allen folgenden Resten nicht mehr als fremder Faktor erscheint.

Von der Richtigkeit dieser Behauptung überzeugt man sich leicht, wenn man beachtet, dass vom ersten Reste R_1 an der Grad eines jeden Divisors um 1 kleiner ist, als der Grad des zugehörigen Dividends und demzufolge jeder Quotient aus zwei Gliedern besteht. Dividirt man nun mit der Funktion

$$y_1 \, x^{n-1} + y_2 \, x^{n-2} + \ldots$$

in die Funktion

$$z_1 \, x^n + z_2 \, x^{n-1} + \ldots$$

worin $y_1, y_2 \ldots z_1 \, z_2 \ldots$ Funktionen von y sind, indem man die letztere zuvor mit y_1^2 multiplizirt, nimmt darauf den entstehenden Rest vom Grade $n-2$ zum Divisor und die erste Funktion zum Dividende, indem man die letztere zuvor mit dem Quadrate des ersten Gliedes des Divisors, also mit

$$[y_1 \, (y_1 \, z_3 - y_3 \, z_1) - y_2 \, (y_1 \, z_2 - y_2 \, z_1)]^2$$

multiplizirt; so ergiebt sich ein Rest, aus welchem sich der zuerst eingeführte fremde Faktor y_1^2 absondern lässt.

Durch die regelmässige Ausscheidung der sukzessiv eingeführten fremden Faktoren nehmen die Reste die folgende Form an.

$$\begin{aligned}
R_1 &= Y_{n-m+1} \, x^{m-1} + \ldots + Y_n \\
R_2 &= Y_{2(n-m+2)} \, x^{m-2} + \ldots + Y_{2n-(m-2)} \\
R_3 &= Y_{3(n-m+3)} \, x^{m-3} + \ldots + Y_{3n-2(m-3)} \\
R_4 &= Y_{4(n-m+4)} \, x^{m-4} + \ldots + Y_{4n-3(m-4)} \\
R_5 &= Y_{5(n-m+5)} \, x^{m-5} + \ldots + Y_{5n-4(m-5)} \\
&\vdots \\
R_p &= Y_{p(n-m+p)} \, x^{m-p} + \ldots + Y_{pn-(p-1)(m-p)} \\
&\vdots \\
R_m &= Y_{mn}
\end{aligned}$$

Hieraus erkennt man das wichtige Resultat, dass die wahre, von allen fremden Faktoren befreite Endgleichung vom Grade mn ist.

Selbstverständlich ergiebt dieses Verfahren auch die Massgleichung frei von allen fremden Faktoren.

Da die Massgleichung in Beziehung zu der zweiten Unbekannten x im Allgemeinen und zwar sicherlich dann, wenn die Restgleichung den höchstmöglichen Grad mn hat, vom ersten Grade ist, da also in diesem allgemeinen Falle jedem Werthe von y nur ein Werth von x entspricht; so leuchtet ein, dass das System der beiden gegebenen Gleichungen im

Allgemeinen mn Auflösungen hat und dass diese Zahl in keinem speziellen Falle überschritten werden kann, abgesehen von denjenigen Fällen, wo für gewisse Werthe der einen Unbekannten die andere ganz willkürlich bleibt.

6. Cauchy hat den vorstehenden Satz über den Grad der Restgleichung mit Hülfe der sogenannten symmetrischen Funktionen bewiesen und zugleich ein Verfahren zur Herstellung jener Gleichung mittelst dieser Funktionen bezeichnet. Dieses Verfahren, obgleich sehr sinnreich, ist gleichwohl äusserst umständlich und liefert auch nur die Restgleichung zur Bestimmung der einen Unbekannten, nicht zugleich die Massgleichung zur Bestimmung der zugehörigen Werthe der anderen Unbekannten (Cours d'algèbre supérieure par Serret, p. 24, oder die deutsche Übersetzung davon in der Theorie der höheren Gleichungen von Schnuse, S. 374 ff.).

Liouville hat den Weg angezeigt, auf welchem man durch das Verfahren von Cauchy auch die Massgleichung bilden könnte. Hierdurch wird aber die ganze Prozedur noch mehr erschwert (Cours d'algèbre supérieure par Serret, p. 37.)

Durch das sub Nr. 5 gelehrte Verfahren erreicht man offenbar das Ziel auf die leichteste Weise, vermeidet alle fremden Faktoren und den durch solche Faktoren bedingten hohen Grad der Restgleichung, sowie die dadurch entstehenden enormen Zahlenkoeffizienten und gewinnt zugleich die ebenfalls von allen fremden Faktoren befreiete Massgleichung, sodass Nebenbetrachtungen wegen eingeführter Faktoren gar nicht weiter erforderlich sind.

7. Wir bemerken noch, dass wenn die eine der beiden gegebenen Gleichungen vom ersten oder zweiten Grade ist, fremde Faktoren weder in die Rest-, noch in die Massgleichung übergehen können, weil hier die Restgleichung schon aus dem ersten, resp. zweiten Reste gebildet wird und man vor der letzten Division keine Gelegenheit hat, einen fremden Faktor einzuführen. Wenn eine der gegebenen Gleichungen vom dritten, die andere aber von demselben oder einem höheren Grade ist; so wird in die Massgleichung kein, in die Restgleichung aber der bei der vorletzten Division eingeführte Faktor erscheinen und daselbst abzusondern sein.

So ist bei dem in Nr. 5 aufgeführten Beispiele aus der Restgleichung der fremde Faktor $(-y+12)^2$ abzusondern, wodurch sie sich auf den neunten Grad reduzirt und folgende Gestalt annimmt.

$$-19x^9+166x^8-516x^7-1493x^6+2410x^5+5838x^4 \\ +21188x^3+18199x^2 \quad 16463x-31723=0$$

Die Massgleichung für jenes Beispiel ist

$$(9y^4-91y^3+324y^2+61y+520)\,x-y^5+25y^4-118y^3 \\ -144y^2-850y+22=0\,,$$

oder

$$x = \frac{y^5 - 25y^4 + 118y^3 + 144y^2 + 850y - 22}{9y^4 - 91y^3 + 324y^2 + 61y + 520}$$

Schiede man die fremden Faktoren nicht nach der obigen Regel allmählich wieder aus; so hätte, wenn die Rechnung durch das in Nr. 1 aufgestellte Schema dargestellt ist, der Faktor,

welcher in den Dividend B eingeführt ist, die Form c_1^2

„ „ „ „ R_1 „ „ „ „ d_1^2

„ „ „ „ R_2 „ „ „ „ $(c_1^2 c_2)^2 = c_1^4 c_2^2$

„ „ „ „ R_3 „ „ „ „ $(d_1^2 d_2)^2 = d_1^4 d_2^2$

„ „ „ „ R_4 „ „ „ „ $(c_1^4 c_2^2 c_3)^2 = c_1^8 c_2^4 c_3^2$

„ „ „ „ R_5 „ „ „ „ $(d_1^4 d_2^2 d_3)^2 = d_1^8 d_2^4 d_3^2$

u. s. w.

und demnach hätte der fremde Faktor

des Restes R_1 die Form —

„ „ R_2 „ „ —

„ „ R_3 „ „ c_1^2

„ „ R_4 „ „ d_1^2

„ „ R_5 „ „ $c_1^4 c_2^2$

„ „ R_6 „ „ $d_1^4 d_2^2$

„ „ R_7 „ „ $c_1^8 c_2^4 c_3^2$

„ „ R_8 „ „ $d_1^8 d_2^4 d_3^2$

u. s. w.

Die fremden Faktoren der Rest- und der Massgleichung, welche unter solchen Umständen eine enorme Höhe annehmen, setzen sich also aus den Potenzen der einfachen Faktoren zusammen, welche in den dem Reste, resp. dem Masse in zweiter, vierter, sechster... Stelle vorhergehenden Dividend eingeführt sind.

8. Die sub Nr. 5 und 7 angestellte Ermittlung beruht auf der Voraussetzung, dass die beiden gegebenen Gleichungen und jeder Rest in den Gliedern, welche die höchsten Potenzen der Hauptgrösse x enthalten, vollständig seien und bleiben, dass also die Reste $R_1, R_2 \ldots R_{m-1}, R_m$ resp. den Grad $m - 1$, $m - 2 \ldots 1,0$ haben.

Die Resultate aus Nr. 5 behalten aber auch dann noch Gültigkeit, wenn die oben bezeichnete Vollständigkeit nicht vorhanden ist. Dieser Zustand äussert nur einen Einfluss auf den Grad der einzuführenden und wieder auszuscheidenden fremden Faktoren.

Wenn nämlich schon der erste Divisor B in der Art unvollständig ist, dass sein höchstes Glied fehlt und das erste Glied desselben einen y enthaltenden Faktor besitzt; so muss man schon in den ersten Dividend A einen fremden Faktor einführen. Der Verlauf der ersten und der darauf folgenden Division ist unter solchen Umständen das Bild jeder zwei

späteren aufeinander folgenden Divisionen zwischen den Resten für den Fall, dass in irgend einem späteren Reste das höchste Glied oder mehrere Glieder vom höchsten herab verschwänden.

Ist also allgemein

$$A = z_0 x^n + z_1 x^{n-1} + z_2 x^{n-2} + \ldots + z_n$$
$$B = y_0 x^m + y_1 x^{m-1} + y_2 x^{m-2} + \ldots + y_m$$

so ist in den Dividend A die $(n - m + 1)$ste Potenz des Faktors y_0 des höchsten Gliedes von B, also der Faktor y_0^{n-m+1} einzuführen. Dieser Faktor tritt dann nach der obigen Regel im Reste R_2 der zweiten Division wieder auf, um daselbst beseitigt zu werden.

Das Wiederauftreten eines fremden Faktors auf der Potenz, mit welcher er eingeführt war, im Reste der nächst zweiten Division wird dadurch nicht beeinträchtigt, dass bei der nächst ersten Division etwa das höchste oder mehrere Glieder des Restes sich auf null reduzirten, also bei der zweiten Division ein Faktor von höherem als zweitem Grade eingeführt werden müsste. Bei dem etwas umständlichen Nachweise dieser Behauptung muss man die Bedingungsgleichungen gehörig im Auge behalten, welche sich daraus ergeben, dass das erste oder mehrere Glieder des vorhergehenden Restes $= 0$ seien.

9. Wenn man Gelegenheit hat, irgend einen Divisor oder Dividend in Faktoren zu zerlegen (worunter die fremden nicht verstanden werden); so wird Diess immer zur Vereinfachung der Rechnung gereichen. Denn zerfällt einer der beiden aufeinander folgenden Reste R_r, R_{r+1} in zwei Faktoren $R_{r+1} = S.T$; so zerfällt das System der gegebenen Gleichungen in die beiden Systeme

$$R_r = 0,\ S = 0 \quad \text{und} \quad R_r = 0,\ T = 0$$

Wäre zufällig von dem fremden Faktor y_0^r der Grundfaktor y_0 oder irgend eine Potenz y_0^s desselben schon ein gemeinschaftlicher Faktor desjenigen Dividends R_{r+1}, in welchen man denselben einführen will; so kommt die Eigenschaft der Grösse y_0^s als nicht fremder Faktor wesentlich in Betracht. Man thut dann wohl, erst einmal y_0^s aus dem fraglichen Dividende ganz auszuscheiden, wodurch man nach Vorstehendem das gegebene System in zwei zerlegt, welche durch

$$R_r = 0,\ y_0^r = 0 \quad \text{und} \quad R_r = 0,\ \frac{R_{r+1}}{y_0^r} = 0$$

dargestellt sind.

Das zweite System erfordert dann die Einführung von y_0^r als fremdem Faktor.

Ebenso ist es zu beachten, wenn von der Grösse y_0 eine gewisse Potenz y_0^r gemeinschaftlicher Faktor des betreffenden Divisors R_r ist. Indem man denselben abtrennt, erhält man die beiden Systeme

$$y_0^r = 0,\ R_{r+1} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{R_r}{y_0^r} = 0,\ R_{r+1} = 0$$

10. Beispiel. Es seien die quadratischen Gleichungen

$$A = 2x^2 + (2y - 3)\,x + (-y + 4) = 0$$
$$B = x^2 + (-4y+1)\,x + (2y - 3) = 0$$

gegeben, bei welchen bekanntlich kein fremder Faktor in die Rest- und Massgleichung übergehen kann.

Eine Elimination von x führt zu folgender Rechnung

$$\begin{array}{l|l|l}
x^2+(-4y+1)x+(2y-3) & 2x^2+(\ \ 2y-3)x+(-y+\ 4) & 2 \\
 & 2x^2+(-8y+2)x+(\ \ 4y-\ 6) & \\
\hline
 & (10y-5)x+(-5y+10) & x^2+(-4y+1)\,x+(2y-3) \\
 & :\,5 & \times(2y-1)^2 \\
 & (2y-1)x+(-\ y+\ 2) & (2y-1)^2x^2+(2y-1)^2(-4y+1)x+(2y-1)^2(2y-3) \\
 & & (2y-1)^2x^2+(2y-1)\,(-\ y+2)x \\
\hline
 & & (2y-1)(-8y^2+7y-3)x+(\ 2y-1)^2(2y-3) \\
 & & (2y-1)(-8y^2+7y-3)x+(-\ y+2)\,(-8y^2+7y-3) \\
\hline
 & & 3y^2-3y+3
\end{array}$$

Es ist also die Restgleichung

$$R_2 = 3\,(y^2 - y + 1) = 0$$

und die Massgleichung

$$R_1 = (2y - 1)\,x + (-y + 2) = 0$$

oder

$$x = \frac{y - 2}{2y - 1}$$

Die Restgleichung hat die beiden Wurzeln $y = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ und $\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$. Vermöge der Massgleichung ergeben sich also die beiden Auflösungen

$$y = \frac{1+\sqrt{-3}}{2},\ x = \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \text{ und } y = \frac{1-\sqrt{-3}}{2},\ x = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}$$

11. Beispiel. Es seien die Gleichungen

$$A = x^2 + (\ 2y + 5{,}2)\ x + (-\ 4y^2 + 2y + 61) = 0$$
$$B = x^2 + (-4y + 5{,}2)\ x + (\quad y^2 - 3y + 61) = 0$$

gegeben. Die Division ergiebt

$$\begin{array}{l|l|l}
x^2+(-4y+5{,}2)x+y^2-3y+61) & x^2+(\ 2y+5{,}2)x+(-4y^2+2y+61) & 1 \\
 & x^2+(-4y+5{,}2)x+(\quad y^2-3y+61) & \\
\hline
 & 6yx \quad +(-5y^2+5y) & \\
 & \quad :y & \\
 & 6x \quad +(-5y+5) &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^2+(-\ 4y+\ 5{,}2)x+(\ y^2-\ 3y+61) & \\
\times 36 & \\
\hline
36x^2+(-144y+187{,}2)x+(36y^2-108y+2196) & 6x+(-19y+26{,}2) \\
36x^2+(-\ 30y+\ 30\ )x & \\
\hline
(-114y+157{,}2)x+(36y^2-108y+2196) & \\
(-114y+157{,}2)x+(95y^2-226y+\ 131) & \\
\hline
-\ 59y^2-118y+2065 &
\end{array}$$

Durch die Ausscheidung des Faktors y im ersten Reste ist das System der beiden gegebenen Gleichungen in zwei andere Systeme zerfallen, von welchen das eine vermöge der Rest- und Massgleichung

$$-59\,(y^2 - 2y - 35) = 0$$

$$6x + (-5y + 5) = 0 \quad \text{also} \quad x = \frac{5\,(-y+5)}{6}$$

und das andere

$$y = 0$$

$$x^2 + (-4y + 5{,}2)\,x + (y^2 - 3y \quad 61) = 0$$

ist. Das erste System liefert, weil der Restgleichung die Werthe $y = 7$ und -5 angehören, die beiden Auflösungen $y = 7$, $x = 5$ und $y = -5$, $x = -5$.

Das zweite System fügt noch die beiden Auflösungen $y = 0$, $x = -2{,}6 + \sqrt{-54{,}24}$ und $y = 0$, $x = -2{,}6 - \sqrt{-54{,}24}$ hinzu.

12. Beispiel. Es sei

$$A = x^2 + (-y + 3)x + (-2y^2 + 2) = 0$$
$$B = x^2 + \quad 2y \qquad x + (\quad y^2 - 1) = 0$$

Die Division giebt

$$\begin{array}{r|l}
x^2 + 2y\,x + (y^2 - 1) & x^2 + (-y + 3)x + (-2y^2 + 2) \;\Big|\; 1 \\
 & x^2 + \quad 2y \qquad x + (\quad y^2 - 1) \;\Big|\; \\
\hline
 & (-3y + 3)x + (-3y^2 + 3) \;\Big|\; x^2 + \quad 2y\,x + (y^2 - 1) \;\Big|\; \\
 & \qquad\qquad :(-3y \;+ 3) \;\Big|\; \\
 & x + (\quad y \;+ 1) \;\Big|\; x^2 + \quad 2y\,x + (y^2 - 1) \;\Big|\; x + (y - 1) \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x^2 + (y+1)\,x \;\Big|\; \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad (y-1)\,x + (y^2 - 1) \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad (y-1)\,x + (y^2 - 1) \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Wegen des Faktors $-3y+3$ im Reste R_1 erhält man zwei Systeme. Das erste ist vermöge der vorstehenden Rest- und Massgleichung

$$0 = 0$$
$$x + (y+1) = 0 \quad \text{also} \quad x = -(y+1)$$

Hiernach bleibt y ganz willkürlich, und für jeden beliebigen Werth von y hat x den Werth $-(y+1)$.

Ausserdem hat man das System

$$-3(y-1) = 0$$
$$x^2 + 2yx + (y^2 - 1) = 0$$

wonach $y = 1$ und gleichzeitig x sowohl $= 0$, wie auch $= -2$ sein kann.

13. Beispiel. Es sei

$$yx^2 + x + (-y^2 + 9) = 0$$
$$x^2 + x + (-y^2 + 9) = 0$$

Die Division giebt

$$\begin{array}{l|l|l}
x^2+x+(-y^2+9) & yx^2 + x + (-y^2+9) & y \\
 & yx^2 + yx + (-y^3+9y) & \\
\hline
 & (-y+1)x + (-y^3 - y^2 - 9y + 9) & x^2 + x + (-y^2+9) \\
 & :(-y+1) & \\
 & x + (-y^2+9) & x + (y^2-8) \\
\hline
 & & (y^2-8)x + (-y^2+9) \\
 & & (y^2-8)x + (-y^2+9)(y^2-8) \\
\hline
 & & (-y^2+9)(-y^2+9)
\end{array}$$

Die Rest- und Massgleichung liefern das System

$$(-y^2+9)(-y^2+9)=0$$
$$x+\quad(-y^2+9)=0 \quad \text{oder} \quad x=y^2-9$$

welchem die Auflösungen $y=\pm 3$, $x=0$ entsprechen.

Ausserdem hat man noch wegen des Faktors von R_1 das System

$$-y+1=0$$
$$x^2+x+(-y^2+9)=0$$

welchem die Auflösungen $y=1$, $x=\frac{-1\pm\sqrt{-31}}{2}$ angehören.

Da die gegebenen Gleichungen in Beziehung zu x beide vom zweiten Grade sind; so könnte man auch die Operation mit der Division der unteren durch die obere beginnen. Diess gäbe

$$yx^2+x+(-y^2+9) \,\Big|\, x^2+x+(-y^2+9) \,\Big|$$
$$\times y$$
$$yx^2+yx+(-y^3+9y) \,\Big|\, 1$$
$$yx^2+x+(-y^2+9)$$
$$\overline{(y-1)x+(-y^3+y^2+9y-9)} \,\Big|\, yx^2+x+(-y^2+9) \,\Big|$$
$$:(y-1)$$
$$x+(-y^2+9) \qquad yx^2+x+(-y^2+9) \,\Big|\, yx+(y^3-9y+1)$$
$$yx^2+\quad(-y^3+9y)x$$
$$\overline{(y^3-9y+1)x+(-y^2+9)}$$
$$(y^3-9y+1)x+(-y^2+9)(y^3-9y+1)$$
$$\overline{(-y^2+9)(-y^3+9y)}$$

Jetzt muss der in den ersten Dividend eingeführte fremde Faktor y im letzten Reste erscheinen. Diess ist in der That der Fall: entfernt man denselben also; so ergiebt sich die frühere Rest- und Massgleichung. Ebenso erhält

man wegen des im ersten Reste abgesonderten Faktors $y - 1$ ein zweites System, welches mit dem obigen übereinstimmt.

14. Beispiel. Es sei

$$A = x^3 + (2y + 1)\,x^2 + (2y^2 + y)\,x + (y^3 + y^2 + 7) = 0$$
$$B = x^2 + y\,x + y^2 = 0$$

Die Division giebt

$$\begin{array}{l|l|l} x^2+yx+y^2 & x^3 + (2y+1)x^2 + (2y^2+y)x + (y^3+y^2+7) & x + (y+1) \\ & x^3 + \quad y\,x^2 \quad + \quad y^2x & \\ \hline & (y+1)x^2 + (y^2+y)x + (y^3+y^2+7) & \\ & (y+1)x^2 + (y^2+y)x + (y^3+y^2\quad) & \\ \hline & 7 & \end{array}$$

Da hier der letzte Rest eine konstante Zahl 7 ist und wegen Ausscheidung von Faktoren kein zweites System von Gleichungen in Betracht kömmt; so ist die Aufgabe unmöglich.

15. Beispiel. Es sei

$$A = x^3 + (y - 2)\,x^2 + y^2x + (3y^3 + y^2 - 5) = 0$$
$$B = x^3 + (3y^3 + y^2 - 5) = 0$$

Die Division giebt

$$
\begin{array}{l|l|l}
x^3+(3y^3+y^2-5) & x^3+(y-2)x^2+y^2x+(3y^3+y^2-5) & 1 \\
 & x^3 \qquad\qquad\qquad +(3y^3+y^2-5) & \\
\hline
 & (y-2)x^2+y^2x & x^3+(3y^3+y^2-5 \\
 & & \quad \times(y-2)^2 \\
 & & (y-2)^2x^3+(y-2)^2(3y^3+y^2-5) \quad (y-2)x-y^2 \\
 & & (y-2)^2x^3+(y-2)y^2x^2 \\
\hline
 & & -(y-2)y^2x^2+(y-2)^2(3y^3+y^2-5) \\
 & & -(y-2)y^2x^2-y^4x \\
\hline
 & & y^4x+(y-2)^2(3y^3+y^2-5) \quad (y-2)x^2+y^2x \\
 & & \qquad\qquad\qquad\qquad \times y^8 \\
 & & y^8(y-2)x^2+y^{10}x \qquad\qquad y^4(y-2)x+[y^6-(y-2)^3(3y^3+y^2-5)] \\
 & & y^8(y-2)x^2+y^4(y-2)^3(3y^3+y^2-5)\,x \\
\hline
 & & [y^{10}-y^4(y-2)^3(3y^3+y^2-5)]x \\
 & & [y^{10}-y^4(y-2)^3(3y^3+y^2-5)]x+(y-2)^2(3y^3+y^2-5)[y^6-(y-2)^3(3y^3+y^2-5)] \\
\hline
 & & -(y-2)^2(3y^3+y^2-5)[y^6-(y-2)^3(3y^3+y^2-5)]
\end{array}
$$

Man sieht, die Restgleichung enthält, wie es sein muss, den fremden Faktor $(y-2)^2$. Scheidet man denselben aus; so wird die wahre Restgleichung vom 9ten Grade

$$(3y^3+y^2-5)\,[y^6-(y-2)^3\,(3y^3+y^2-5)]=0$$

und die Massgleichung giebt

$$x=-\frac{(y-2)^2\,(3y^3+y^2-5)}{y^4}$$

§. 13.

Substitution bestimmter Zahlwerthe für die Unbekannten einer Gleichung, Division der Gleichung durch $(x-r)(y-s)$ und Transformirung derselben in eine andere, deren Wurzeln um r und s kleiner sind.

1. Die bei der nachfolgenden Behandlung der Gleichungen mit zwei Unbekannten öfter vorkommenden Substitutionen bestimmter Zahlwerthe r, s für die Unbekannte x, y lassen sich durch ein mechanisches Verfahren sehr erleichtern. Wenn es sich um die Substitution ganzer Reihen solcher Werthe handelt, gewähren die Differenzenreihen oftmals eine grössere Hülfe. Wir geben die nachstehenden Sätze ohne Beweis und umständliche Beschreibung, da Beides leicht zu abstrahiren ist.

Um in eine nach x geordnete Funktion, z. B. in die Funktion

$$f(x,y) = x^3 + (y-5)x^2 + (3y^2 - y + 3)x + (y^3 - 2y^2 + 5y + 7)$$

für x den Werth 2 zu substituiren, behandelt man die y enthaltenden Koeffizienten ganz nach §. 5. Der Einfachheit wegen braucht man aber auch von diesen Koeffizienten nur die Zahlenkoeffizienten ihrer einzelnen Glieder zu notiren, was folgendes Schema giebt, in welchem die gesuchten Zahlen unterstrichen sind.

1	1	−5	3	−1	3	1	−2	5	7	$(x=2$
		2		2	−6		6	2	−6	
1	1	−3	3	1	−3	1	4	7	1	

Das Resultat der Substitution ist also

$$f(2,y) = y^3 + 4y^2 + 7y + 1$$

Gleichzeitig stellt diese Rechnung den bei der Division der gegebenen Funktion durch $x - r = x - 2$ sich ergebenden Quotienten heraus, welchem das vorhergehende Resultat als Rest angehört. Dieser Quotient ist

$$x^2 + (y-3)x + (3y^2 + y - 3)$$

Hat man für die zweite Grösse y, nach welcher die Funktion f nicht geordnet ist, den Werth $y = s$ zu substituiren; so könnte man zwar die Funktion erst nach y ordnen und dann nach Vorstehendem verfahren. Es ist jedoch weit einfacher, die Funktion in ihrer gegebenen Form zu lassen und die Substitution in die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von x für sich vorzunehmen.

Um z. B. in die obige Gleichung für y den Werth 3 zu substituiren,

hat man folgende Rechnung, in welcher die gesuchten Zahlen gleichfalls unterstrichen sind.

1	1	— 5	3	— 1	3	1	— 2	5	7	($y = 3$
		3		9	24		3	3	24	
$\underline{1}$	1	— $\underline{2}$	3	8	$\underline{27}$	1	1	8	$\underline{31}$	

Es ist also

$$f(x, 3) = x^3 - 2x^2 + 27x + 31$$

und der Quotient

$$x^2 + (3y + 8)\,x + (y^2 + y + 8)$$

Sollen in die Funktion f gleichzeitig für beide Unbekannten x, y bestimmte Werthe r, s substituirt werden; so führt man erst die Substitution $x = r$ aus und dann in der hierdurch als letztes Glied sich ergebenden bloss y enthaltenden Funktion die Substitution $y = s$, also die eine der vorstehenden beiden Operationen nach der andern. Diess giebt z. B. für die Substitution von $x = 2$ und $y = 3$ in die obige Gleichung

1	1	— 5	3	— 1	3	1	— 2	5	7	($x = 2$
		2		2	— 6		6	2	— 6	
1	1	— 3	3	1	— 3	1	4	7	1	($y = 3$
							3	21	84	
						1	7	28	$\underline{85}$	

Es ist also

$$f(2,3) = 85$$

Will man auch den durch die Division mit $(x - 2)\,(y - 3)$ sich ergebenden Quotienten bestimmen, welchem alsdann drei Reste entsprechen, indem man

$$\frac{f(x, y)}{(x - r)\,(x - s)} = Q + \frac{R_x}{y - s} + \frac{R_y}{x - r} + \frac{R}{(x - r)\,(x - s)}$$

oder

$$f(x, y) = Q\,(x - r)\,(x - s) + R_x\,(x - r) + R_y\,(y - 5) + R$$

setzt, worin der Quotient Q eine Funktion von x und y, der Rest R_x nur eine Funktion von x, der Rest R_y nur eine Funktion von y, und der Rest R eine bekannte Zahl ist; so muss man die Substitution $y = 3$ nicht bloss in dem letzten Gliede, wie es zu dem vorstehenden Zwecke allerdings hinreichend war, sondern auch in den übrigen Gliedern ausführen. Diess giebt, wenn man im Endresultate die zu Q, R_x, R_y, R gehörigen Koeffizienten mit diesen Buchstaben markirt,

1	1	— 5	3	— 1	3	1	— 2	5	7	$(x=2$
		2		2	— 6		6	2	— 6	
1	1	— 3	3	1	— 3	1	4	7	1	$(y=3$
		3		9	30		3	21	84	
1	1	— 0	3	10	27	1	7	28	85	
R_x	Q	R_x	Q	Q	R_x	R_y	R_y	R_y	R	

Jetzt ist nach den in der untersten Reihe stehenden Zahlen

$$Q = x + (3y + 10)$$
$$R_x = x^2 + 27$$
$$R_y = y^2 + 7y + 28$$
$$R = 85$$

also

$$\frac{f(x,y)}{(x-2)(y-3)} = x+3y+10+\frac{x^2+27}{y-3}+\frac{y^2+7y+28}{x-2}+\frac{85}{(x-2)(y-3)}$$

oder

$$f(x,y) = (x + 3y + 10)(x - 2)(y - 3) + (x^2 + 27)(x - 2) + (y^2 + 7y + 28)(y - 3) + 85$$

Zu noch deutlicherer Veranschaulichung dieses Mechanismus, welcher desshalb ganz interessant ist, weil er mit der grössten Leichtigkeit und auf dem kleinsten Raume die grosse Menge von Zahlenkoeffizienten für die gesuchten Formeln ergiebt, wollen wir denselben noch auf das Beispiel

$$f(x,y)=2x^4+(3y-4)x^3+(-2y^2+5y+1)x^2+(y^3+3y^2)x+(-6y^4+y^3-5)$$

anwenden.

Die Substitution $x = -2$ ergiebt

2	3	— 4	— 2	5	1	1	3	0	0	—6	1	0	0	—5	$(x=-2$
		— 4		— 6	16		4	2	— 34		—2	—14	—4	68	
2	3	— 8	— 2	— 1	17	1	7	2	— 34	—6	—1	—14	—4	63	

Also ist

$$f(-2,y) = -6y^4 - y^3 - 14y^2 - 4y + 63$$

und der Quotient der Division mit $x + 2$

$$2x^3 + (3y - 8)x^2 + (-2y^2 - y + 17)x + (y^3 + 7y^2 + 2y - 34)$$

Die Substitution $y = 3$ ergiebt

2	3	—4	—2	5	1	1	3	0	0	—6	1	0	0	—5	$(y=3$
		9		—6	—3		3	18	54		—18	—51	—153	—459	
2	3	5	—2	—1	—2	1	6	18	54	—6	—17	—51	—153	—464	

Also ist

$$f(x,3) = 2x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 54x - 464$$

und der Quotient der Division mit $y - 3$

$$3x^3 + (-2y - 1)x^2 + (y^2 + 6y + 18)x + (-6y^3 - 17y^2 - 51y - 153)$$

Die Substitution von $x = -2$ und $y = 3$ ergiebt, wenn man nur das Resultat derselben verlangt,

2	3	−4	−2	5	1	1	3	0	0	−6	1	0	0	−5	$(x=-2$
		−4		−6	16		4	2	−34		−2	−14	−4	68	
2	3	8	−2	−1	17	1	7	2	−34	−6	−1	−14	−4	63	$(y = 3$
											−18	−57	−213	−651	
										−6	−19	−71	−217	−588	

Also ist

$$f(-2,3) = -588$$

Wollte man aber gleichzeitig den Quotienten der Division mit $(x + 2)$ $(y - 3)$ und die oben bezeichneten drei Partialreste darstellen; so hätte man die letzte Rechnung noch in den ersten vier Gliedern für die Substitution $y = 3$ zu vervollständigen, was folgende nochmals von vorn geschriebene Rechnung ergeben würde.

2	3	−4	−2	5	1	1	3	0	0	−6	1	0	0	−5	$(x=-2$
		−4		−6	16		4	2	−34		−2	−14	−4	68	
2	3	−8	−2	−1	17	1	7	2	−34	−6	−1	−14	−4	63	$(y=3$
		9		−6	−21		3	30	96		−18	−57	−213	−651	
2	3	1	2	−7	−4	1	10	32	62	−6	−19	−71	−217	−588	
R_xQ		R_x	Q		Q	R_xQ	Q	Q	R_x	R_y	R_y	R_y	R_y	R	

Hiernach ist

$$Q = 3x^2 + (2y - 7)\,x + (y^2 + 10y + 32)$$
$$R_x = 2x^3 + x^2 - 4x + 62$$
$$R_y = -6y^3 - 19y^2 - 71y - 217$$
$$R = -588$$

2. Um eine Gleichung herzustellen, in welcher die Wurzel x um die Zahl r kleiner ist, als in der gegebenen Gleichung, hat man die Division mit $x - r$ in vorstehend beschriebener Weise nach dem Prinzipe des §. 6 wiederholt auszuführen.

Soll also die Gleichung

$$x^3 + (y - 5)\,x^2 + (3y^2 - y + 3)\,x + (y^3 - 2y^2 + 5y + 7) = 0$$

in eine andere transformirt werden, in welcher die Wurzel x um 2 kleiner ist; so hat man

1	1	−5	3	−1	3	1	−2	5	7	$(r = 2$
		2		2	−6		6	2	−6	
1	1	−3	3	1	−3	1	4	7	1	
		2		2	−2					
1	1	−1	3	3	−5					
		2								
1	1	1								

Die transformirte Gleichung ist also

$$x'^3 + (y+1)x'^2 + (3y^2 + 3y - 5)x' + (y^3 + 4y^2 + 7y + 1) = 0$$

Soll nicht die Wuzel x, sondern die Wurzel y um den Betrag s vermindert werden; so hat man die Divisionen mit $y - s$ an den y enthaltenden Koeffizienten der einzelnen Potenzen von x zu vollziehen. Diess giebt, wenn im vorstehenden Beispiele die Wurzel y um 3 vermindert werden sollte,

1	1	−5	3	−1	3	1	−2	5	7	$(s = 3$
		3		9	24		3	3	24	
	1	−2	3	8	27	1	2	8	31	
				9			3	12		
			3	17		1	4	20		
							3			
						1	7			

Die transformirte Gleichung ist also

$$x^3 + (y' - 2)x^2 + (3y'^2 + 17y' + 27)x + (y'^3 + 7y'^2 + 20y' + 31) = 0$$

Soll gleichzeitig die Wurzel x um r und die Wurzel y um s vermindert werden; so führt man erst die Operation mit $x - r$ und dann die mit $y - s$ aus, welche sich im nachfolgenden Schema aneinanderfügen, wenn man die Wurzel x der gegebenen Gleichung um 2 und die Wurzel y um 3 vermindert.

1	1	— 5	3	— 1	3	1	— 2	5	7	($r = 2$
		2		2	— 6		6	2	— 6	
1	1	— 3	3	1	3	1	4	7	1	($s = 3$
		2		2	— 2		3	21	84	
1	1	— 1	3	3	— 5	1	7	28	85	
		2		6	27		3	30		
1	1	1	3	9	22	1	10	58		
		3		9			3			
1	1	4	3	18		1	13			

Die transformirte Gleichung ist hiernach

$$x'^3 + (y' + 4)x'^2 + (3y'^2 + 18y + 22)x' + (y'^3 + 13y'^2 + 58y' + 85) = 0$$

§. 14.

Ermittlung einer genäherten Auflösung zweier Gleichungen.

1. Das in §. 12 beschriebene Verfahren zur Auflösung von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten ist zwar vollkommen sicher; aber trotz der von uns bewerkstelligten Vereinfachung der Eliminationsmethode sehr umständlich. Denn zunächst ist schon bei niedrigen Graden (vom dritten an) das Divisionsverfahren zur Herstellung der Rest- und Massgleichung und die Nebenrechnung wegen der fremden Faktoren äusserst beschwerlich; ausserdem hat man als Restgleichung zur Bestimmung der einen Unbekannten y eine Gleichung von sehr hohem Grade mn und ausserdem mit grossen Koeffizienten, also wenn beide gegebenen Gleichungen vom 7ten Grade wären, eine Gleichung vom 49sten Grade zu erwarten, deren Auflösung sehr mühsam ist; endlich aber ist die Substitution der aus der Restgleichung erhaltenen Werthe von y in die Massgleichung zur Bestimmung der Werthe von x äusserst unbequem, wenn der Grad der letzteren Gleichung in Beziehung zu y hoch ist und eine Genauigkeit auf mehrere Dezimalstellen verlangt wird.

Demgemäss wird in vielen Fällen das nachstehende Verfahren vorzuziehen sein, welches immer zwei zusammengehörige Werthe von x und y, welche eine Auflösung bilden, mit sukzessiv sich erhöhender Genauigkeit giebt und bei welchem alle Operationen nur mit einziffrigen Zahlen in ähnlicher Weise vorzunehmen sind, wie Diess bei der Auflösung von Gleichungen mit einer Unbekannten nach der Hornerschen Methode stattfindet.

Ehe wir ein hierauf abzielendes Verfahren beschreiben können, müssen wir uns mit der Aufsuchung der ersten Näherungswerthe,

also der Anfangsziffern aller zusammengehörigen Paare der Grössen x, y beschäftigen.

Da geometrische Vorstellung die Verhältnisse anschaulicher macht; so bemerken wir, dass durch die Gleichung

$$z = f(x, y)$$

worin x, y ganz beliebige Werthe annehmen können, eine Fläche dargestellt ist. Der Kurve, in welcher diese Fläche die Ebene der xy schneidet, für welche also $z = 0$ ist, entspricht die Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

Die Koordinaten dieser Kurve sind also die Auflösungen der ersten der beiden gegebenen Gleichungen.

Ist ebenso

$$z' = f'(x, y)$$

eine zweite Fläche, und also

$$f'(x, y) = 0$$

die Durchschnittskurve zwischen dieser Fläche und der Ebene der xy; so stellen die Koordinaten x, y der letzteren Kurve die Auflösungen der zweiten gegebenen Gleichung dar.

Die gemeinschaftlichen Auflösungen der beiden gegebenen Gleichungen sind mithin die Koordinaten der Punkte, in welchen sich die erwähnten beiden Kurven in der Ebene der xy durchschneiden.

Die fraglichen Kurven und deren Durchschnittspunkte kann man folgendermassen konstruiren.

Was zunächst die Kurve

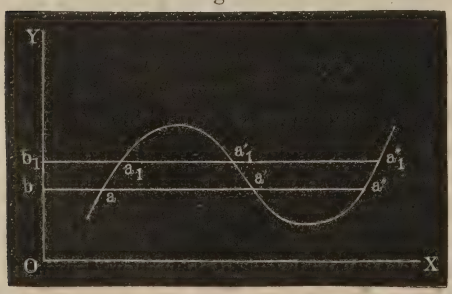
$$f(x, y) = 0$$

betrifft; so substituire man darin für y irgend einen bestimmten Werth b. Diess giebt die Gleichung mit einer Unbekannten x

$$f(x, b) = 0$$

Lös't man diese Gleichung für x auf; so bezeichnet jede Auflösung wie $x = a$, $x = a'$, $x = a''$ einen Punkt der fraglichen Kurve (Fig. 13.)

Fig. 13.



Lässt man jetzt b allmählich wachsen, also in b_1 übergehen; so liefert die Auflösung der Gleichung

$$f(x, b_1) = 0$$

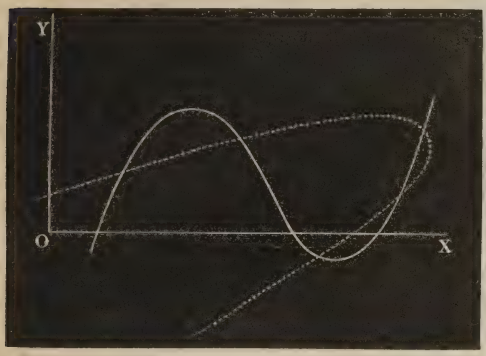
in der Form $x = a_1$, $x = a'_1$, $x = a''_1$ wiederum Punkte derselben Kurve.

Wenn der Unterschied zwischen b und b_1 gering ist, wird es immer leicht sein,

nachdem erst einmal die Auflösungen der Gleichung $f(x, b) = 0$ gefunden sind, auch die benachbarten Auflösungen der Gleichung $f(x, b_1)$ zu finden.

Die fragliche Kurve wird im Allgemeinen aus mehreren Krümmungen oder Schenkeln bestehen, welche bei fortgesetzter Vergrösserung oder Verkleinerung von y immer paarweise verschwinden, indem sie in dem Verschwindungspunkte eine zur Axe der x parallele Tangente haben.

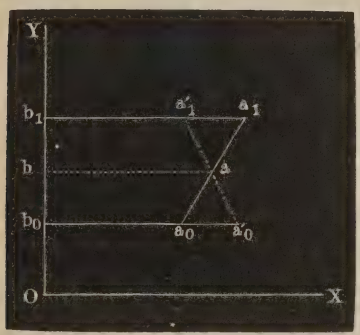
Fig. 14.



Ebenso wie die erste Kurve $f(x, y) = 0$ konstruirt man die zweite Kurve $f'(x, y) = 0$, welche in Fig. 14 punktirt ist.

Jeder Durchschnittspunkt zwischen der punktirten und der ausgezogenen Kurve stellt eine Auflösung der gegebenen Gleichungen in reellen Zahlen dar.

Fig. 15.



Um die Näherungswerthe für die Koordinaten dieser Durchschnittspunkte zu finden; so seien in Fig. 15

$$y = b_0 \quad x = a_0$$

und

$$y = b_1 \quad x = a_1$$

zwei benachbarte Auflösungen der ersten Gleichung und

$$y = b_0 \quad x = a'_0 \qquad \text{und} \qquad y = b_1 \quad x = a'_1$$

zwei benachbarte Auflösungen der zweiten Gleichung. Das Kriterium, dass zwischen den beiden Werthen b_0 und b_1 von y eine gemeinschaftliche Auflösung

$$y = b \qquad x = a$$

liege, dass sich also die Linienzüge $a_0\, a_1$ und $a'_0\, a'_1$ durchkreuzen, besteht nun darin, dass wenn für den einen Werth $y = b_1$ die Wurzel der ersten Gleichung grösser ist, als die der zweiten ($a_1 > a'_1$), für den anderen Werth $y = b_0$ umgekehrt die Wurzel der ersten Gleichung kleiner ist, als die der zweiten ($a_0 < a'_0$), insofern nicht in jenem Interwalle zwei oder überhaupt eine paare Anzahl von Auflösungen liegen, was durch Verkleinerung der Intervalle zu ermitteln sein würde.

Sind b_0, b_1, b_2 . . . die Werthe der aufeinander folgenden Ziffern in den verschiedenen dekadischen Ordnungen; so ist die Anfangsziffer von b_0 auch die von b. Was die Anfangsziffer von a betrifft; so liegt dieselbe zwischen a_0 und a_1 oder zwischen a'_0 und a'_1. Stellt sich durch diese Vergleichung die Anfangsziffer von a unzweifelhaft heraus; so ist sie gefunden: liegen aber zwischen jenen Grenzen Zahlen mit verschiedenen Anfangsziffern; so ist das Intervall von b_0 bis b_1 zu theilen. Man kann dann für a und b sogleich diejenigen Zahlen untersuchen, welche in der Nachbarschaft der dem Kreuzpunkte der Geraden $a_0\ a_1$ und $a'_0\ a'_1$ entsprechenden Werthe liegen, also für b diejenigen, welche in der Nachbarschaft von

$$b = \frac{(a'_0 - a_0)\ b_1 + (a_1 - a'_1)\ b_0}{(a'_0 - a_0) + (a_1 - a'_1)}$$

liegen, was für a Werthe erzeugt, welche in der Nachbarschaft von

$$a = \frac{a'_0\ a_1 - a_0\ a'_1}{(a'_0 - a_0) + (a_1 - a'_1)}$$

liegen werden.

Alle Operationen kann man offenbar so leiten, dass man für x und y immer nur positive Werthe zu berechnen braucht, indem man nöthigenfalls die Zeichen der Glieder mit den unpaaren Potenzen der betreffenden Unbekannten in die entgegengesetzten verwandelt.

2. Als Beispiel dienen die beiden Gleichungen

$$f(x,y) = x^3 + (y-5)x^2 + (3y^2 - y + 3)x + (y^3 - 2y^2 + 5y + 7) = 0$$
$$f'(x,y) = x^3 + (2y+7)x^2 + (y^2 - 2y + 1)x + (y^3 - 3y^2 + 2y - 10) = 0$$

Um die erste Kurve zu construiren, hat man zunächst die Koeffizienten der ersten Gleichung für die sukzessiven Werthe von y zu bilden, indem man diese Grösse erst durch die Reihe 0, 1, 2 . . . 9, dann durch die Reihe 0, 10, 20 . . . 90, dann durch die Reihe 0, 100, 200 . . . 900 u. s. w., sodann durch die Reihe 0; 0,1; 0,2 . . . 0,9; dann durch die Reihe 0; 0,01; 0,02 . . . 0,09 u. s. w., schliesslich aber auch durch die negativen Werthe dieser Reihen variiren lässt.

Es ist jedoch rathsam, erst einmal bei einer dieser Reihen stehen zu bleiben und in ähnlicher Weise die zweite Gleichung zu behandeln, um einigermassen die Gegend zu ermitteln, in welcher gemeinschaftliche Auflösungen zu erwarten sind.

Eine Variation von y durch die ganzen Zahlen von -10 bis $+10$ mit Hülfe der Differenzenreihen ergiebt folgende Koeffizienten für die erste Gleichung

y	x^3	x^2	x	—
—10	1	— 15	313	—1243
— 9	1	— 14	255	— 929
— 8	1	— 13	203	— 673
— 7	1	— 12	157	— 469
— 6	1	— 11	117	— 311
— 5	1	— 10	83	— 193
— 4	1	— 9	55	— 109
— 3	1	— 8	33	— 53
— 2	1	— 7	17	— 19
— 1	1	— 6	7	— 1
0	1	— 5	3	7
1	1	— 4	5	11
2	1	— 3	13	17
3	1	— 2	27	31
4	1	— 1	47	59
5	1	0	73	107
6	1	1	105	181
7	1	2	143	287
8	1	3	187	431
9	1	4	237	619
10	1	5	293	857

Sucht man jetzt die Anfangsziffern der Wurzeln x der Gleichung für $y = 0$, also der Gleichung

$$f(x, 0) = x^3 - 5x^2 + 3x + 7 = 0$$

so findet man, dass diese Gleichung drei reelle Wurzeln resp. zwischen 0 und — 1, zwischen 2 und 3, zwischen 3 und 4 hat.

Dieses Resultat genügt, um die Ermittlung der Anfangsziffern der Wurzeln der Nachbargleichung für $y = 1$, also der Gleichung

$$f(x, 1) = x^3 - 4x^2 + 5x + 11 = 0$$

bedeutend zu erleichtern, indem man dieselben in der Nachbarschaft der Anfangsziffern der Wurzeln der vorhergehenden Gleichung sucht. Es ergiebt sich, dass die neue Gleichung nur eine reelle Wurzel zwischen — 1 und — 2 hat.

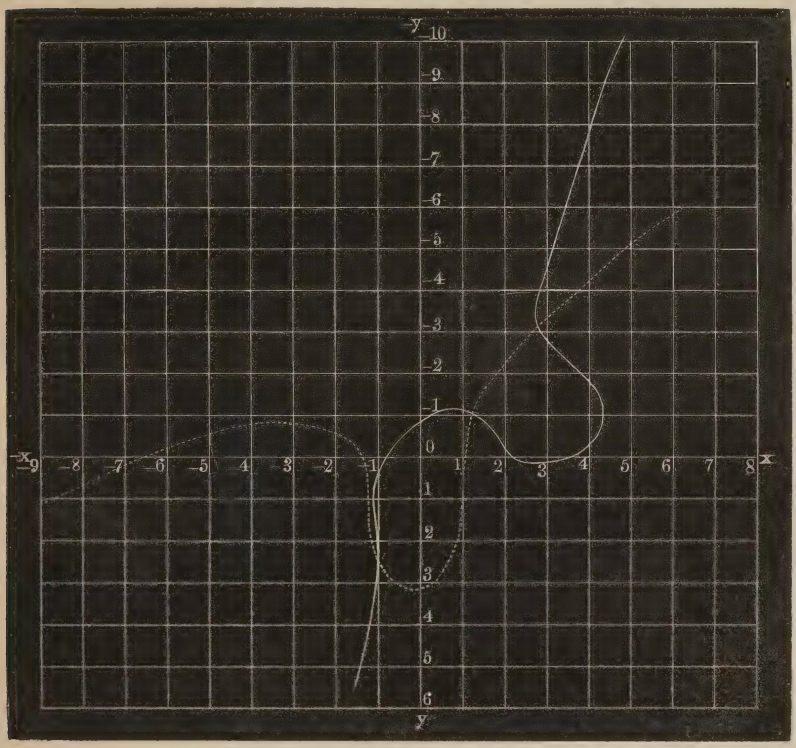
Stellt man die Werthe aller dieser Funktionen $f(x,0)$, $f(x,1)$ u. s. w., welche sich aus der Substitution solcher Werthe von x ergeben, welche in der Nachbarschaft der Wurzeln der jedesmal vorhergehenden Gleichung liegen; so erhält man folgende Tabelle.

	$x =$							
y	— 2	— 1	0	1	2	3	4	5
—10	.	.	.	.	.	.	—167	72
— 9	.	.	.	.	.	.	— 69	221
— 8	.	.	.	.	.	.	— 5	142
— 7	.	.	.	.	.	—79	31	.
— 6	.	.	.	.	.	—32	45	.
— 5	.	.	.	.	—39	— 7	43	.
— 4	.	.	.	.	—27	2	.	.
— 3	.	.	.	.	—11	1	.	.
— 2	.	.	—19	— 8	— 5	— 4	1	.
— 1	.	—15	— 1	1	— 3	— 7	— 5	9
0	— 27	— 2	7	6	1	— 2	3	22
1	— 23	1	11	13	13	17	31	61
2	— 29	0	17	.	.	.	.	.
3	— 39	1	.	.	.	.	.	.
4	— 47	10	.	.	.	.	.	.
5	— 47	33	.	.	.	.	.	.

Wenn man in dieser Tabelle die Stellen fixirt, wo die Zeichenwechsel in horizontaler und vertikaler Linie eintreten; so hat man das geometrische Bild der ersten Kurve $f(x,y) = 0$ vor Augen, welche in

Fig. 16 durch die ausgezogene Linie dargestellt ist, wobei wir die positive Axe der x nach rechts und die der y nach unten gekehrt haben, wie man gewohnt ist die Zahlentabellen anzuordnen.

Fig. 16.



Verfährt man jetzt ebenso mit der zweiten Gleichung; so erhält man für $y = -10 \ldots$ folgende Koeffizienten.

y	x^3	x^2	x	—
—10	1	—13	121	—1330
— 9	1	—11	100	—1000
— 8	1	— 9	81	— 730
— 7	1	— 7	64	— 514
— 6	1	— 5	49	— 346
— 5	1	— 3	36	— 220
— 4	1	— 1	25	— 130
— 3	1	1	16	— 70
— 2	1	3	9	— 34
— 1	1	5	4	— 16
0	1	7	1	— 10
1	1	9	0	— 10
2	1	11	1	— 10
3	1	13	4	— 4
4	1	15	9	14
5	1	17	16	50
6	1	19	25	110
7	1	21	36	200
8	1	23	49	326
9	1	25	64	494
10	1	27	81	710

Eine Substitution sukzessiver Werthe für x in diese einzelnen Gleichungen liefert folgende Tabelle.

y	$x =$																		
	−11	−10	− 9	− 8	− 7	− 6	− 5	− 4	− 3	− 2	− 1	0	1	2	3	4	5	6	7
− 6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−101	−16	95
− 5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	− 60	10	.	.
− 4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−76	−37	18	.	.	.
− 3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−52	−26	14	.	.	.	.
− 2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−21	4	.	.	.	.	.
− 1	.	.	.	.	.	−76	−36	−16	−10	−12	−16	−16	− 6	20	.	.	.	.	.
0	.	.	.	.	−17	20	35	34	23	8	− 5	−10	− 1	28	.	.	.	.	.
1	.	.	−10	54	.	.	.	.	.	18	− 2	−10	0	34	.	.	.	.	.
2	−21	80	.	.	.	.	.	.	.	24	− 1	−10	3	44	.	.	.	.	.
3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	32	4	− 4	14	.	.	.	.	.	.
4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	19	14	39	.	.	.	.	.	.

Die Kurve $f(x, y) = 0$, welche den Zeichenwechseln dieser Tabelle entspricht, ist durch die punktirte Linie in Fig. 16 dargestellt.

Aus den Durchschnitten der beiden Kurven f und f' erkennt man, dass die beiden gegebenen Gleichungen drei reelle Auflösungen haben. Die Anfangsziffern sind für die eine $x = 2$, $y = -3$ und für die andere $x = -1$, $y = 2$. Für die dritte ist die Anfangsziffer der Wurzel x sicher $= 1$: was jedoch die Wurzel y anlangt; so lässt die Zeichnung und die Zahlentabellen kein zuverlässiges Urtheil zu, ob y nahe unter oder über -1 liegt. Man würde hierüber nicht im Zweifel sein, wenn man Gewissheit darüber hätte, ob der Durchschnittspunkt der ersten Kurve f mit der durch $y = -1$ gehenden Horizontalen vor oder hinter dem Durchschnittspunkte der zweiten Kurve f' mit derselben Horizontalen liegt, ob also die Wurzel der Gleichung

$$f(x, -1) = x^3 - 6x^2 + 7x - 1 = 0$$

welche zwischen 1 und 2 liegt, grösser oder kleiner ist, als die entsprechende Wurzel der Gleichung

$$f'(x, -1) = x^3 + 5x^2 + 4x - 16 = 0$$

Um Diess zu entscheiden, entwickeln wir diese Wurzeln auf so viel Dezimalstellen, bis Verschiedenheit eintritt. Da sich die Wurzel der ersteren zu $x = 1{,}343\ldots$, die Wurzel der letzteren dagegen zu $x = 1{,}306$ ergiebt; so liegt der Durchschnitt der ersten Kurve f mit der Horizontalen $y = -1$ hinter dem Durchschnitte der zweiten Kurve f' mit derselben Horizontalen. Die Durchkreuzung findet also in dem Quadrate statt, welches oberhalb jener Horizontalen liegt, d. h. die Anfangsziffer der Wurzel y, welche der Wurzel $x = 1, \ldots$ entspricht, ist nicht 0, sondern -1.

3. Im Allgemeinen bemerken wir noch über die Durchkreuzungen der beiden Kurven f und f', dass man durch die obigen Zahlentabellen nicht bloss die beiden Ecken eines Quadrates erkennt, zwischen welchen eine solche Kurve hindurchgeht, indem Diess immer zwei Ecken sind, welchen ein Zeichenwechsel entspricht, sondern dass man auch aus dem Verhältnisse der diesen beiden Ecken entsprechenden absoluten Zahlenwerthe mit ziemlicher Genauigkeit den Abstand von der einen oder anderen Ecke bezeichnen kann, in welchem der Durchgang erfolgt.

Hat man nämlich für die eine Ecke in der betreffenden Tabelle die Zahl a und für die andere die Zahl $-b$; so ist der Abstand von der ersten Ecke nahezu $= \frac{a}{a+b}$ und von der zweiten $\frac{b}{a+b}$.

In den meisten Fällen wird die Darstellung der Kurven mit diesen Hülfsmitteln genügen, um die Quadrate zu erkennen, in welchen die Auflösungen liegen. Nur in einzelnen Fällen, wo ein Durchschnittspunkt sehr nahe an die Seite eines Quadrates selbst fällt, oder wo in demselben Quadrate mehrere Durchschnitte vorkommen, ist es, wie bei der dritten Auflösung des vorstehenden Beispieles, erforderlich, die Durchschnitte der Kurven mit den betreffenden Quadratseiten genauer zu be-

stimmen, was immer durch die Auflösung einer Gleichung mit nur einer Unbekannten geschehen kann.

In allen Fällen wird es rathsam sein, zur Bestimmung der Anfangsziffern eine graphische Darstellung der wenigen Quadrate zu Hülfe zu nehmen, in deren Gegend die Durchschnitte liegen müssen.

So lehrt unter Anderem Fig. 16, dass die erste Kurve f in der Horizontalen $y = 1$ links von der Vertikalen $x = -1$ eine Krümmung nach links macht, in Folge deren noch ein doppelter Durchschnitt mit der zweiten Kurve f' möglich wäre.

Um hierüber volle Gewissheit zu erlangen, entwickeln wir die ersten Dezimalstellen der Wurzeln aus den beiden Gleichungen

$$f(x, 1) = x^3 - 4x^2 + 5x + 11 = 0$$
$$f'(x, 1) = x^3 + 9x^2 - 10 = 0$$

welche zwischen -1 und -2 liegen, oder was Dasselbe ist, der positiven Wurzeln aus den beiden Gleichungen

$$f(-x, 1) = x^3 + 4x^2 + 5x - 11 = 0$$
$$f'(-x, 1) = x^3 - 9x^2 + 10 = 0$$

welche zwischen 1 und 2 liegen. Da sich für die Wurzel der ersten $x = 1{,}0608\ldots$ und für die der zweiten $x = 1{,}12\ldots$ ergiebt und die letztere grösser ist, als die erstere; so können die in Frage gestellten beiden Durchschnitte nicht stattfinden; die gegebenen Gleichungen haben also nur die schon angezeigten drei reellen Auflösungen

$x =$	$1, \ldots$	$2, \ldots$	$-1, \ldots$
$y =$	$-1, \ldots$	$-3, \ldots$	$2, \ldots$

§. 15.

Genauere Berechnung der Wurzeln zweier Gleichungen.

1. Nachdem durch das Verfahren des vorstehenden Paragraphen die Anfangsziffern der Wurzeln zweier Gleichungen bestimmt sind, berechnen sich die späteren Ziffern sukzessive folgendermassen.

Man richtet sich durch den entsprechenden Zeichenwechsel so ein, dass man für eine Auflösung, welche man soeben vervollständigen will, nur positive Werthe von x und y zu bestimmen hat, und beginnt damit, die Wurzeln in den beiden gegebenen Gleichungen um die Werthe der Anfangsziffern zu erniedrigen. Diess geschieht durch ein Verfahren, welches dem in §. 6 beschriebenen ganz analog ist. Dasselbe ist jedoch für jede Gleichung zweimal in Anwendung zu bringen, nämlich einmal, um x zu erniedrigen, wobei die y enthaltenden Koeffizienten ganz in früherer Weise wie gegebene Grössen behandelt werden, und alsdann

um y zu erniedrigen, wobei jeder y enthaltende Koeffizient wie eine Funktion des betreffenden Grades für sich allein behandelt wird.

Um also in dem Beispiele des vorhergehenden Paragraphen die Auflösung $x = 1, \ldots$; $y = -1, \ldots$ genauer zu berechnen, verwandeln wir, um nur mit positiven Wurzeln zu operiren, die Zeichen der Glieder der unpaaren Potenzen von y in die entgegengesetzten, schreiben also

$$f = x^3 + (-y-5)x^2 + (3y^2 + y + 3)x + (-y^3 - 2y^2 - 5y + 7) = 0$$
$$f' = x^3 + (-2y+7)x^2 + (y^2 + 2y + 1)x + (-y^3 - 3y^2 - 2y - 10) = 0$$

Die Verkleinerung der Wurzel x um $r = 1$ und dann die Verkleinerung der Wurzel y um $s = 1$ in der ersten Gleichung giebt nach §. 13 folgende Rechnung.

1	−1	−5	3	1	3	−1	−2	−5	7	($r=1$
		1		−1	−4			3	0	−1		
1	−1	−4	3	0	−1	−1	1	−5	6	($s=1$
		1		−1	−3		−1	0	−5		
1	−1	−3	3	−1	−4	−1	0	−5	1		
		1		3	2		−1	−1			
1	−1	−2	3	2	−2	−1	−1	−6			
		−1		3			−1				
	−1	−3	3	5		−1	−2				

Die erste transformirte Gleichung von f ist also

$$x'^3 + (-y'-3)x'^2 + (3y'^2 + 5y' - 2)x' + (-y'^3 - 2y'^2 - 6y' + 1) = 0$$

Verfährt man ebenso mit der Gleichung f'; so kommt

1	−2	7	1	2	1	−1	−3	−2	−10	($r=1$
		1		−2	8			1	0	9		
1	−2	8	1	0	9	−1	−2	−2	−1	($s=1$
		1		−2	9			−1	−3	−5		
1	−2	9	1	−2	18	−1	−3	−5	−6			
		1		1	−1			−1	−4			
1	−2	10	1	−1	17	−1	−4	−9				
		−2		1				−1				
	−2	8	1	0		−1	−5					

Die erste transformirte Gleichung von f' ist also

$$x'^3 + (-2y' + 8)x'^2 + (y'^2 + 17)x' + (-y'^3 - 5y'^2 - 9y' - 6) = 0$$

2. Um jetzt die zweiten Ziffern r', s' der Wurzeln x, y zu bestimmen, behalten wir zur Approximationsrechnung aus den beiden ersten transformirten Gleichungen nur das bekannte Glied und die in die erste Potenz von x und von y multiplizirten beiden Glieder bei. Hierdurch kürzen sich diese beiden Gleichungen ab auf die Form

$$\begin{aligned} a\,x' + b\,y' + c &= 0 \\ \alpha\,x' + \beta\,y' + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

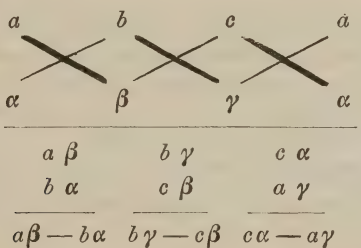
und man hat

$$x' = \frac{b\gamma - c\beta}{a\beta - b\alpha}$$

$$y' = \frac{c\alpha - a\gamma}{a\beta - b\alpha}$$

welche Ausdrücke als Näherungswerthe von x' und y' zur Bestimmung der Anfangsziffer von x' und y', welche die zweite Ziffer von x und y ist, angesehen werden können.

Der Nenner ist in beiden Ausdrücken gleich. Um diesen Nenner, sowie die beiden Zähler durch eine mechanische Zusammenstellung der Zahlen, aus welchen dieselben gebildet sind, zu erhalten, schreibe man die Grössen a, b, c, a und darunter die Grössen α, β, γ, α. Eine Multiplikation der benachbarten Zahlen in der unteren Reihe mit denen der oberen ergiebt die einzelnen Theile jener Zähler und Nenner und darauf die Zähler und Nenner selbst in folgender Weise



Die erste Differenz ist der gemeinschaftliche Nenner, die zweite ist der Zähler von x' und die dritte der Zähler von y'. Diese drei Zahlen stehen also einander schon so gegenüber, wie man es gewohnt ist, um durch Division mit dem voranstehenden Nenner in jeden der darauf folgenden Zähler sofort die erste Ziffer von x' und y' zu ermitteln und darunter zu notiren.

Für das vorstehende Beispiel hat man, indem man die Koeffizienten der abgekürzten transformirten Gleichungen sofort aus diesen Gleichungen entnimmt,

— 2	— 6	1	— 2
17	— 9	— 6	17
18	36	17	
— 102	— 9	12	
120	45	5	

$r' = 0{,}3 \qquad s' = 0{,}0$

Die zweiten Ziffern von x und y sind also 3 und 0 oder mit Rücksicht auf ihren dekadischen Werth 0,3 und 0,0.

Diese Ziffern bedürfen jedoch einer Kontrole. Am einfachsten beschafft man diese Kontrole durch direkte Substitution in die vollständigen transformirten Gleichungen. Zu dem Ende muss man aber nicht bloss die Substitution $x' = 0{,}3$ und $y' = 0{,}0$, sondern überhaupt folgende vier Substitutionen

$x' = 0{,}3$	0,3	0,4	0,4
$y' = 0{,}0$	0,1	0,0	0,1

machen, welche den vier Ecken des verkleinerten Quadrates entsprechen, in welchen der Durchschnitt erfolgen müsste, wenn 0,3 und 0,0 die richtigen Anfangsziffern von x' und y' sind.

Ergiebt sich aus den Resultaten dieser Substitution, dass der Durchschnitt nicht in dem fraglichen Quadrate liegen kann, dass also 0,3 und 0,4 nicht die richtigen Ziffern sind; so werden jene Resultate zugleich die Richtung bezeichnen, in welcher die Korrektion weiter zu verfolgen ist.

Um die Substitutionen für die vier Ecken eines Quadrates auszuführen, macht man erst die Substitution für den Werth von x, welcher zwei Ecken entspricht, und hierauf einmal die Substitution für das y der einen und dann die Substitution für das y der anderen Ecke. Ebenso verfährt man mit der dritten und vierten Ecke.

Im vorstehenden Beispiele hat man, wenn man in die erste transformirte Gleichung von f erst $x' = 0{,}3$ und dann $y' = 0{,}0$ sowie $y = 0{,}1$ setzt,

1	— 1	— 3	3	5	— 2	— 1	— 2	— 6	1	$(x' = 0{,}3$
		— 0,3		— 0,3	— 0,99		0,9	1,41	— 0,897	
1	— 1	— 3,3	3	4,7	— 2,99	— 1	— 1,1	— 4,59	— 0,103	$(y' = 0{,}0$
							0	0	0	
						— 1	— 1,1	— 4,59	0,103	
							— 0,1	— 0,12	— 0,471	$(y' = 0{,}1$
						— 1	— 1,2	— 4,71	— 0,368	

Wenn man jetzt $x' = 0{,}4$ und dann $y' = 0{,}0$, sowie $y' = 0{,}1$ substituirt; so kommt

1	— 1	— 3	3	5	— 2	— 1	— 2	— 6	1	($x' = 0{,}4$
		— 0,4		— 0,4	— 1,36		1,2	1,84	— 1,344	
1	— 1	— 3,4	3	4,6	— 3,36	— 1	— 0,8	— 4,16	— 0,344	($y' = 0{,}0$
							0	0	0	
						— 1	— 0,8	— 4,16	— 0,344	
							— 0,1	— 0,09	— 0,425	($y' = 0{,}1$
						— 1	— 0,9	— 4,25	— 0,769	

Eben dieselben Substitutionen in die erste transformirte Gleichung von f' geben folgende Rechnung:

1	— 2	8	1	0	17	— 1	— 5	— 9	— 6	($x' = 0{,}3$
		0,3		— 0,6	2,49		0,3	— 0,18	5,847	
1	— 2	8,3	1	— 0,6	19,49	— 1	— 4,7	— 9,18	— 0,153	($y' = 0{,}0$
							0	0	0	
						— 1	— 4,7	— 9,18	— 0,153	
							— 0,1	— 0,43	— 0,966	($y' = 0{,}1$
						— 1	— 4,8	— 9,66	— 1,119	
1	— 2	8	1	0	17	— 1	— 5	— 9	— 6	($x' = 0{,}4$
		0,4		— 0,8	3,36		0,4	— 0,32	8,144	
1	— 2	8,4	1	— 0,8	20,36	— 1	4,6	— 9,32	2,144	($y' = 0{,}0$
							0	0	0	
						— 1	4,6	— 9,32	2,144	
							— 0,1	0,45	— 0,887	($y' = 0{,}1$
						— 1	4,5	— 8,87	1,257	

Die Resultate der vorstehenden Substitutionen sind also

für die erste transformirte Gleichung von f

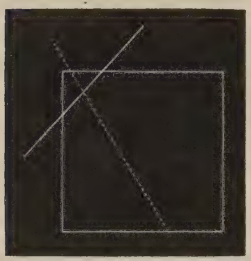
y'	$x' =$ 0,3	0,4
0,0	0,103	— 0,344
0,1	— 0,368	— 0,769

für die erste transformirte Gleichung von f'

y'	$x' =$ 0,3	0,4
0,0	— 0,153	2,144
0,1	— 1,119	1,257

Nach der relativen Grösse und dem Zeichenwechsel dieser Zahlen ist es unzweifelhaft, dass der Durchschnittspunkt wirklich in dem fraglichen Quadrate, welches in Fig. 17 dargestellt ist, wirklich liegt, dass also 0,3 und 0,0 die richtigen Anfangsziffern von x' und y' sind.

Fig. 17.



Wir bemerken noch, dass wenn die aus der Näherungsrechnung gefundenen Ziffern unrichtig wären, Diess auch ohne Kontrole bei der Fortsetzung der Rechnung sich daran zeigen würde, dass man für eine spätere Ziffer entweder einen negativen Werth oder einen positiven Werth $\gtrless$ erhielte.

Wenn die Wurzeln durch die allmähliche Verkleinerung erst einen gewissen Grad von Kleinheit angenommen haben, kann man die Kontrolerechnung ganz auf sich beruhen lassen. Weiter unten sub Nr. 3 werden wir übrigens zeigen, dass jede folgende Transformationsrechnung sofort erkennen lässt, ob die darin angewandten Ziffern etwa zu gross sind.

3 Behuf Bestimmung der dritten Ziffern sind aus den ersten transformirten Gleichungen durch Verkleinerung der Wurzel x um $r' = 0{,}3$ und der Wurzel y um $s' = 0{,}0$ die zweiten transformirten Gleichungen herzustellen. Zu diesem Zwecke hat man (da wegen $s' = 0$ die Wurzel unverändert bleibt)

1	−1	−3	3	5	−2	−1	−2	−6	1	($r' = 0{,}3$
		0,3		−0,3	−0 81			0,9	1,41	−0,843
1	−1	−2,7	3	4,7	−2,81	−1	−1,1	−4,59	0,157	($s' = 0{,}0$
		0,3		−0,3	−0,72					
1	−1	−2,4	3	4,4	−3,53					
		0,3								
1	−1	−2,1								

Die zweite transformirte Gleichung von f ist also

$$x''^3 + (-y'' - 2{,}1)\,x''^2 + (3\,y''^2 + 4{,}4\,y'' - 3{,}53)\,x'' + (-y''^3 - 1{,}1\,y''^2 - 4{,}59\,y'' + 0{,}157) = 0$$

Für die andere Gleichung hat man die Rechnung

1	−2	8	1	0	17	−1	−5	−9	−6	($r' = 0{,}3$
		0,3		−0,6	2,49		0,3	−0,18	−5,847	
1	−2	8,3	1	−0,6	19,49	−1	−4,7	−9,18	−0,153	($s' = 0{,}0$
		0,3		−0,6	2,58					
1	−2	8,6	1	−1,2	22,07					
		0,3								
1	−2	8,9								

Die zweite transformirte Gleichung von f' ist also

$$x''^3 + (-2y'' + 8{,}9)x''^2 + (y''^2 - 1{,}2y'' + 22{,}07)x'' + (-y''^3 - 4{,}7y''^2 - 9{,}18y'' - 0{,}153) = 0$$

Es leuchtet ein, dass die Niederschreibung der transformirten Gleichungen ganz unnöthig ist, da man die wissenswerthen Koeffizienten unmittelbar aus dem Berechnungsschema entnehmen kann.

Ausserdem wird man bei der Ausübung die Koeffizienten jeder späteren transformirten Gleichung unmittelbar unter den Koeffizienten der vorhergehenden transformirten Gleichung berechnen. Der Übersichtlichkeit wegen ist es aber gut, beim Beginn der Rechnung für eine neue transformirte Gleichung alle Koeffizienten der vorhergehenden in eine horizontale Reihe zu schreiben.

Die dritten Ziffern r'', s'' berechnen sich jetzt nach der sub Nr. 2 gegebenen Regel folgendermassen, wobei es genügt, die Produkte in abgekürzten Zahlen zu berechnen.

— 3,53	— 4,59	0,157	— 3,53
22,07	— 9,18	— 0,153	22,07
32,41	0,70	3,46	
—101,30	—1,44	0,54	
133,71	2,14	2,92	

$r'' = 0{,}01$ $\quad s'' = 0{,}02$

Wir wollen jetzt die Kontrole dieser Werthe von r'' und s'' auf sich beruhen und es darauf ankommen lassen, dass die etwaige Fehlerhaftigkeit derselben sich durch spätere positive Ziffern $\geqq 10$ oder durch negative zu erkennen gebe.

Die jetzt noch erforderliche Rechnung, wenn man im letzten Gliede bei 6 Dezimalstellen stehen bleiben, also am geeigneten Orte die abgekürzte Rechnung eintreten lassen will, ist die folgende, wobei erst die Transformation von f, dann die von f' und schliesslich die Nebenrechnung zur Bestimmung der einzelnen Ziffern aufgeführt ist, während man in der Ausübung diese drei Rechnungen in Absätzen auf drei besonderen Blättern neben einander ausführen wird. Bei jedem mit einem neuen Ziffernpaare beginnenden Absatze sind anfangs und solange die abgekürzte Rechnung nicht eine grosse Menge der Koeffizienten als unveränderlich erscheinen lässt, alle Koeffizienten in einer horizontalen Reihe zusammengezogen.

Transformation von f von der zweiten transformirten Gleichung an.

1	— 1	— 2,1	3	4,4	— 3,53	— 1	— 1,1	— 4,59	0,157	r^{II}	= 0,01
		0,01		— 0,01	— 0,0209		0,03	0,0439	— 0,035509		
1	— 1	— 2,09	3	4,39	— 3,5509	— 1	— 1,07	— 4,5461	0,121491	s^{II}	= 0,02
		0,01		— 0,01	— 0,0208		— 0,02	— 0,0218	— 0,091358		
1	— 1	— 2,08	3	4,38	— 3,5717	— 1	— 1,09	— 4,5679	0,030133		
		0,01		0,06	0,0888		— 0,02	— 0,0222			
1	— 1	— 2,07	3	4,44	— 3,4829	— 1	— 1,11	— 4,5901			
		— 0,02		0,06			— 0,02				
1	— 1	— 2,09	3	4,50	— 3,4829	— 1	— 1,13	— 4,5901	0,030133	r^{III}	= 0,006
		0,006		— 0,006	— 0,1250		0,018	0,0269	— 0,021647		
1	— 1	— 2,084	3	4,494	— 3,6079	— 1	— 1,11	— 4,5632	0,008486	s^{III}	= 0,001
		0,006		— 0,006	— 0,1205			— 0,0011	— 0,004564		
1	— 1	— 2,08	3	4,49	— 3,7284	— 1	— 1,11	— 4,5643	0,003922		
		0,006			0,0045			— 0,0011			
	— 1	— 2,07	3	4,49	— 3,723|9	— 1	— 1,11	— 4,5654			
								— 0,0011			
1	— 1	— 2,07	3	4,49	— 3,723|9	— 1	— 1,11	— 4,566|5	0,00392|2	r^{IV}	= 0,0000
					0,003 6			— 0,000 9	— 0,00365 4	s^{IV}	= 0,0008
					— 3,720			— 4,567	0,00027	r^{V}	= 0,00002
									— 0,00007		
									0,00020	s^{V}	= 0,00004
									— 0,00018		
									0,00002	r^{VI}	= 0,000001
										s^{VI}	= 0,000003

Transformation von f' von der zweiten transformirten Gleichung an.

1	— 2	8,9	1	— 1,2	22,07	— 1	— 4,7	— 9,18	— 0,153	r^{II}	= 0,01
		0,01		— 0,02	0,0891		0,01	— 0,0122	0,221791		
1	— 2	8,91	1	— 1,22	22,1791	— 1	— 4,69	— 9,1922	0,068791	s^{II}	= 0,02
		0,01		— 0,02	0,0892		— 0,02	— 0,0942	— 0,185728		
1	— 2	8,92	1	— 1,24	22,2683	— 1	— 4,71	— 9,2864	— 0,116937		
		0,01		0,02	— 0,0244		— 0,02	— 0,0946			
1	— 2	8,93	1	— 1,22	22,2439	— 1	— 4,73	— 9,3810			
		— 0,04		0,02			— 0,02				
1	— 2	8,89	1	— 1,20	22,2439	— 1	— 4,75	— 9,3810	— 0,116937	r^{III}	= 0,006
		0,006		— 0,01	0,0534		0,006	— 0,0073	0,133784		
1	— 2	8,896	1	— 1,21	22,2973	— 1	— 4,74	— 9,3883	0,016847	s^{III}	= 0,001
		0,006		0,01	0,0534			— 0,0047	— 0,009393		
1	— 2	8,902	1	— 1,20	22,3507	— 1	— 4,74	— 9,3930	0,007454		
		0,006			— 0,0012			— 0,0047			
1	— 2	8,91	1	— 1,20	22,349|5	— 1	— 4,74	— 9,3977	0,007454	r^{IV}	= 0,0000
					0,000 9			— 0,0038	— 0,007521	s^{IV}	= 0,0008
					22,348			— 9,4015	— 0,000067		
								— 0,0038			
					22,348			— 9,4053	— 0,000067	r^{V}	= 0,00002
									0,000447		
									0,000380	s^{V}	= 0,00004
									— 0,000376		
									0,000004	r^{VI}	= 0,000001
										s^{VI}	= 0,000003

Nebenrechnung zur Bestimmung der Ziffern.

— 3,483		— 4,590	0,030133		— 3,483
22,244		— 9,381	— 0,116937		22,2439
	32,64	0,5370		0,6694	
	— 102,08	— 0,2823		0,4072	
	134,72	0,8193		0,2622	
		$r^{III} = 0{,}006$		$s^{III} = 0{,}001$	
— 3,724		— 4,566	0,00392		— 3,724
22,349		— 9,398	0,00745		22,349
	34,93	— 0,0340		0,0876	
	— 102,14	— 0,0368		— 0,0277	
	137,07	0,0028		0,1153	
		$r^{IV} = 0{,}0000$		$s^{IV} = 0{,}0008$	
— 3,720		— 4,568	0,00027		3,720
22,348		— 9,405	— 0,000067		— 22,348
	34,99	0,000306		0,006034	
	— 102,09	— 0,002539		0,000249	
	137,08	0,002845		0,005785	
		$r^{V} = 0{,}00002$		$s^{V} = 0{,}00004$	
— 3,720		— 4,568	0,00002		— 3,720
22,348		— 9,405	0,000004		22,348
	34,99	— 0,000018		0,000447	
	— 102,09	— 0,000188		— 0,000015	
	137,08	0,000170		0,000462	
		$r^{VI} = 0{,}000001$		$s^{VI} = 0{,}000003$	

Nach Vorstehendem ist die gesuchte Auflösung, auf 6 Dezimalstellen genau,

$$x = 1{,}316021$$
$$y = 1{,}021843$$

§. 16.

Anwendung der Regula falsi auf die Auflösung zweier Gleichungen.

1. Wenn von den beiden Gleichungen

$$z = f(x, y) = 0$$
$$z' = f'(x, y) = 0$$

bereits drei Näherungsauflösungen x_1, y_1, ferner x_2, y_2 und x_3, y_3, welchen resp. die Werthe z_1, z'_1, ferner z_2, z'_2 und z_3, z'_3 entsprechen, bekannt sind; so findet man bekanntlich eine genauere Auflösung durch die Formeln

$$x_4 = \frac{x_1(z_2 z'_3 - z_3 z'_2) + x_2(z_3 z'_1 - z_1 z'_3) + x_3(z_1 z'_2 - z_2 z'_1)}{(z_2 z'_3 - z_3 z'_2) + (z_3 z'_1 - z_1 z'_3) + (z_1 z'_2 - z_2 z'_1)}$$

$$y_4 = \frac{y_1(z_2 z'_3 - z_3 z'_2) + y_2(z_3 z'_1 - z_1 z'_3) + y_3(z_1 z'_2 - z_2 z'_1)}{(z_2 z'_3 - z_3 z'_2) + (z_3 z'_1 - z_1 z'_3) + (z_1 z'_2 - z_2 z'_1)}$$

welche auch in folgende Form gebracht werden können

$$x_4 = x_1 + \frac{(x_2 - x_1)(z_3 z'_1 - z_1 z'_3) + (x_3 - x_1)(z_1 z'_2 - z_2 z'_1)}{(z_2 z'_3 - z_3 z'_2) + (z_3 z'_1 - z_1 z'_3) + (z_1 z_2' - z_2 z'_1)}$$

$$y_4 = y_1 + \frac{(y_2 - y_1)(z_3 z'_1 - z_1 z'_3) + (y_3 - y_1)(z_1 z'_2 - z_2 z'_1)}{(z_2 z'_3 - z_3 z'_2) + (z_3 z'_1 - z_1 z'_3) + (z_1 z_2' - z_2 z'_1)}$$

2. Die Bedeutung dieser Formeln gewinnt durch folgende Betrachtung an Interesse.

Wenn man durch diejenigen drei Punkte der Fläche $z = f(x, y)$, welchen die Koordinaten x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 angehören, eine Ebene legt, deren allgemeine Gleichung

$$z = ax + by + c$$

ist, für welche also die drei Bedingungen

$$z_1 = ax_1 + by_1 + c$$
$$z_2 = ax_2 + by_2 + c$$
$$z_3 = ax_3 + by_3 + c$$

gelten; so bezeichnet

$$a x + b y + c = 0$$

die gerade Durchschnittslinie zwischen jener Ebene und der Koordinatenebene $x y$.

In ähnlicher Weise stellt

$$a' x + b' y + c' = 0$$

die Durchschnittslinie zwischen derselben Koordinatenebene der $x y$ und derjenigen Ebene dar, welcher die drei Punkte x_1, y_1, z'_1; x_2, y_2, z_2'; x_3, y_3, z_3' der zweiten Fläche $z' = f'(x, y)$ angehören.

Die Koeffizienten a', b', c' sind durch ähnliche drei Bedingungsgleichungen bestimmt, wie die Koeffizienten a, b, c.

Die Koordinaten des Durchschnittspunktes der erwähnten beiden Durchschnittslinien

$$x_4 = \frac{b c' - c b'}{a b' - b a'} \qquad y_4 = \frac{c a' - a c'}{a b' - b a'}$$

sind genau die Näherungswerthe, welche man nach den obigen Formeln aus den drei gegebenen Paaren von Näherungswerthen als eine noch grössere Annäherung ableitet.

Demnach besteht dieses Näherungsverfahren darin, dass man statt der Flächen zwei Ebenen setzt, welche durch je drei Punkte der Flächen in der Nachbarschaft desjenigen Punktes gehen, in welchem die Durchschnittslinien der Flächen mit der Ebene der xy sich selbst kreuzen. Die zwei korrespondirenden Punkte in den beiden Flächen, z. B. diejenigen, welchen die Höhen z_1 und z'_1 angehören, haben in der horizontalen Ebene der xy gleiche Koordinaten x_1, y_1. Die Koordinaten des Punktes, wo die Durchschnittslinien jener beiden Ebenen mit der Ebene der $x y$ sich überschneiden, liefert die gesuchten näheren Werthe für x und y.

3. Die Anwendung des vorstehenden Verfahrens setzt die Bekanntschaft dreier Paare von Näherungswerthen voraus und leidet demnach nicht bloss an der Unsicherheit, welche der Begriff des Näherungswerthes bedingt, sondern auch an dem Mangel einer Regel, wie solche ersten Näherungswerthe zu finden sind.

Es wird daher von Interesse sein, nachzuweisen, dass die Regula falsi auch ohne die Bekanntschaft von eigentlichen Näherungswerthen geeignet ist, ein zusammengehöriges Paar der Grössen x, y mit einer grösseren Genauigkeit zu bestimmen. Diese Regel bleibt dann sogar für transzendente Gleichungen anwendbar.

Es kommt zu diesem Ende nur darauf an, drei Punkte P_1, P_2, P_3 (Fig. 18) der Ebene $X Y$ zu ermitteln, welche ein Dreieck $P_1 P_2 P_3$ bilden, innerhalb dessen der gesuchte Punkt C liegt, dessen Koordinaten x, y eine Auflösung der beiden gegebenen Gleichungen f und f' bilden.

Wenn $A B$ den Durchschnitt der Fläche f und $A' B'$ den Durchschnitt der Fläche f' mit der Ebene $X Y$ bezeichnet; so ist der gesuchte Punkt C offenbar der Durchschnittspunkt der beiden Kurven $A B$, $A' B'$.

Zur Erläuterung bemerken wir, dass wenn ACA' derjenige Winkel ist, in welchem die Höhen z und z' aller Punkte der Flächen f und f' positiv sind, was wir in der Figur mit $+\,+$ angedeutet haben, im entgegengesetzten Winkel $B'CB$ alle Höhen negativ sind, was durch $-\,-$ bezeichnet ist, wogegen in dem Winkel $A'CB$ die Höhen von f positiv, die von f' dagegen negativ sind, was durch $+\,-$ bezeichnet ist, während in dem Winkel ACB' die Höhen von f negativ und die von f' positiv sind, was durch $-\,+$ dargestellt ist.

Bezeichnet in Fig. 19 DE die Projektion der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie der beiden Flächen f und f'; so ist in dem Winkel ACD und BCE die absolute Höhe von f kleiner, als die von f', was

Fig. 18.

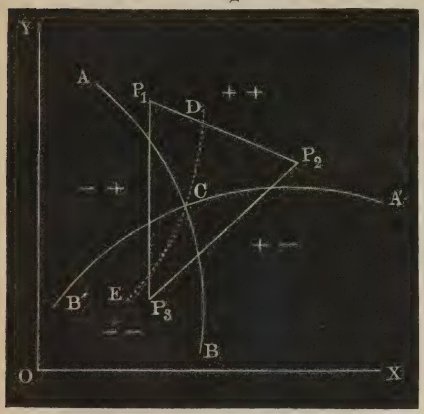
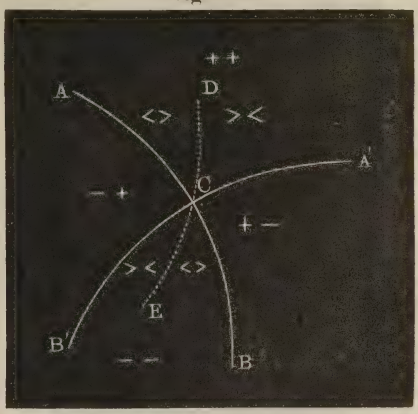


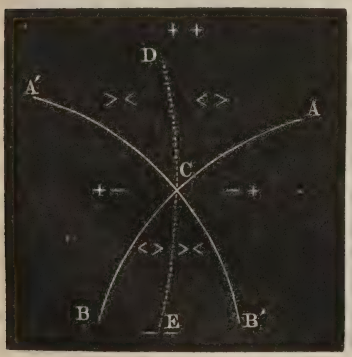
Fig. 19.



durch $<>$ angedeutet ist, wogegen in den Winkeln $A'CD$ und $B'CE$ die Höhe von f grösser ist, als die von f', was durch $><$ dargestellt ist.

In Vorstehendem ist angenommen, dass wenn man von C in den Winkel ACA', wo z und z' positiv sind, hineinsieht, die Durchschnittslinie CA der Fläche f links und die Durchschnittslinie CA' der Fläche f' rechts liege. Fände das Umgekehrte statt, oder vertauschte man die Bezeichnung der beiden Flächen f und f'; so erhielte man die in Fig. 20 dargestellten Verhältnisse.

Fig. 20.



Setzt man an die Stelle der beiden Flächen f und f' die oben beschriebenen beiden Ebenen; so werden die derselben entsprechenden Durchschnitte AB, $A'B'$ und die Projektion DE

gerade Linien. Dieselben werden sich zwar in einem anderen, als dem Punkte C durchkreuzen; sie müssen aber nothwendig eine solche Lage haben, dass jeder der drei Punkte P_1, P_2, P_3 in dem Winkel liegt, welcher nach der Bezeichnung in Fig. 19 der Natur resp. des Winkels ACD, $A'CD$, BCE, welchen er gegen die Durchschnittskurven der Flächen f und f' einnimmt, entspricht.

Zunächst ist also zu konstatiren, dass der Durchschnittspunkt C wirklich in dem Dreiecke $P_1 P_2 P_3$ liegt. Von den mannichfaltigen Formen, welche dabei die Kurven AB, $A'B'$ einnehmen können, sind einige in Fig. 21, 22, 23 dargestellt. Die gewöhnlichen sind die in

Fig. 21.

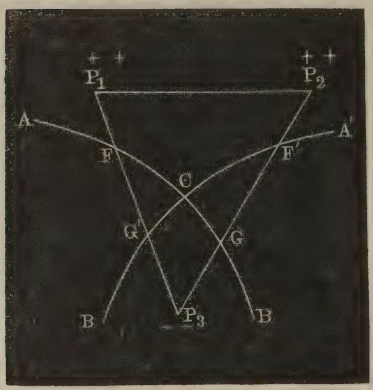


Fig. 22.

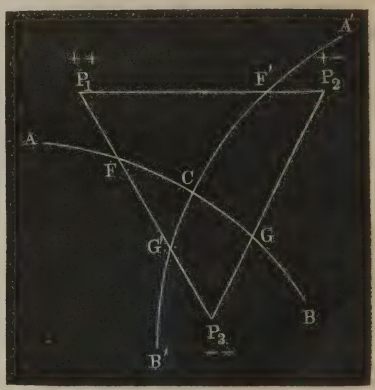
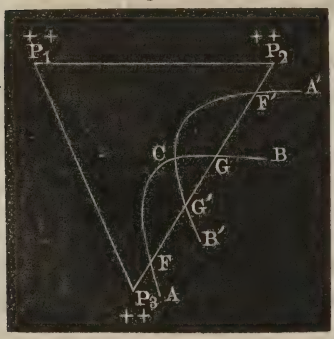


Fig. 21 und 22 verzeichneten, wo jede Kurve eine Dreiecksseite nur einmal durchschneidet.

Über die Lage des Punktes C verschafft man sich nur dadurch Gewissheit (insofern Diess nicht in speziellen Fällen aus anderen Merkmalen einfacher geschlossen werden kann), dass man die Horizontalordinaten x, y längs des Zuges einer jeden Dreiecksseite $P_1 P_2$, $P_2 P_3$, $P_3 P_1$ sowohl in der Gleichung $z = f(x, y)$, als auch in $z' = f'(x, y)$ variiren lässt und die Zeichenwechsel von z und z', wodurch die Punkte F, G, F', G' bestimmt werden, beobachtet.

Fig. 23.



Sollen z. B. die Durchschnittspunkte auf der Linie $P_1 P_2$ ermittelt werden; so hat man die Beziehung

$$y = y_1 + \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1) = \varphi(x)$$

oder

$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\, x + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2} = \varphi(x)$$

zu berücksichtigen. Substituirt man diesen Ausdruck für y in f und f'; so erhält man

$$z = f[x, \varphi(x)] = F(x)$$
$$z' = f'[x, \varphi(x)] = F'(x)$$

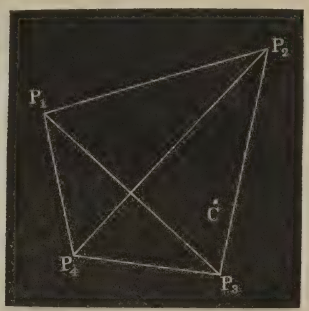
in welchen Funktionen die einzige Variabele x von x_1 bis x_2 zu variiren ist.

Wenn man in dem Umfange des Dreieckes $P_1 P_2 P_3$ in der Richtung dieser Buchstaben herumgeht; so müssen die vier Durchschnittspunkte in allen Fällen die Reihenfolge $F F' G G'$ beobachten, insofern nicht etwa die Kurven $A B$, $A' B'$ innerhalb des Dreieckes sich mehr als einmal durchkreuzen.

Nachdem jetzt konstatirt ist, dass der Durchschnittspunkt C wirklich in dem Dreiecke $P_1 P_2 P_3$ liegt, bestimmt man die Koordinaten x_4, y_4 des Punktes P_4 nach den obigen Formeln als erste Näherungswerthe für x, y. Dieser Punkt P_4 fällt entweder innerhalb jenes Dreiecks, wie in Fig. 24, oder ausserhalb desselben, wie in Fig. 25. In beiden Fällen kann der Punkt C nur in einem der drei Dreiecke liegen, welche P_4

Fig. 24.

Fig. 25.



zur gemeinschaftlichen Spitze und je eine Seite des ursprünglichen Dreiecks zur Basis haben. Dieses Dreieck $P_2 P_3 P_4$ ist nach den vorstehenden Merkmalen zu ermitteln.

Hierauf bestimmt man nach den obigen Formeln aus den Koordinaten der drei Punkte P_2, P_3, P_4 den Punkt P_5, dessen Koordinaten x_5, y_5 die näheren Approximationswerthe für x, y darstellen.

Aus P_5 und den betreffenden zwei Punkten des zuletzt behandelten Dreieckes $P_2 P_3 P_4$ finden sich dann die noch näheren Koordinaten x_6, y_6 des Punktes P_6 u. s. f.

4. Ob der aus den drei Eckpunkten eines Dreieckes wie $P_1\,P_2\,P_3$ zu bestimmende Punkt P_4 innerhalb oder ausserhalb des Dreieckes und in welche Gegend er überhaupt fällt, lässt sich aus den Höhenordinaten der Eckpunkte leicht nach folgenden Kennzeichen beurtheilen, welche auch für die analytische Geometrie, insbesondere für die Theorie der Ebene ein Interesse haben werden.

Setzen wir zur Abkürzung

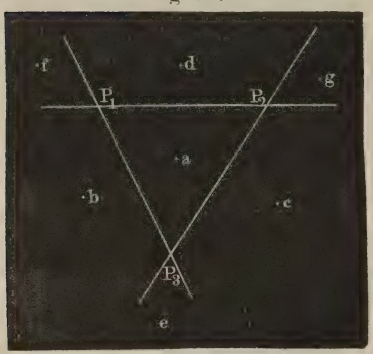
$$\begin{aligned} Z_{12} &= z_1 z'_2 - z_2 z'_1 \\ Z_{23} &= z_2 z'_3 - z_3 z'_2 \\ Z_{31} &= z_3 z'_1 - z_1 z'_3 \end{aligned}$$

worin man eine Zirkularbewegung erkennt, welche den Umfang des Dreieckes $P_1\,P_2\,P_3$ in der Richtung 1, 2, 3 durchschreitet; so sind nach den obigen Formeln die Horizontalkoordinaten x_4, y_4 des Punktes P_4, in welchem die Durchschnittslinie der durch z_1, z_2, z_3 und z'_1, z'_2 z'_3 gelegten Ebenen die Ebene $X\,Y$ trifft,

$$x_4 = \frac{x_1 Z_{23} + x_2 Z_{31} + x_3 Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}$$

$$y_4 = \frac{y_1 Z_{23} + y_2 Z_{31} + y_3 Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}$$

Fig. 26.



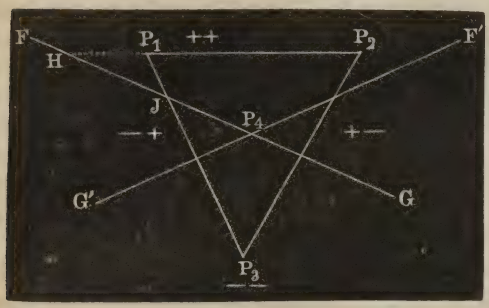
Durchläuft man nun das Dreieck $P_1\,P_2\,P_3$ in der Richtung dieser Buchstaben und ist die positive Axe der z nach oben gekehrt; so liegt der Punkt P_4 rechts von irgend einer Seite, wie z. B. $P_1\,P_2$, wenn das darauf bezügliche Z, hier also Z_{12}, positiv ist, dagegen links, wenn Z_{12} negativ ist.

Aus den Zeichen der drei Grössen Z_{12}, Z_{23}, Z_{31} kann man also sofort auf den Ort von P_4 schliessen; ist nämlich (Fig. 26)

Z_{12}	Z_{23}	Z_{31}		
+	+	+	so liegt P_4 innerhalb des Dreieckes, also in	a
+	+	−	. . . . ausserhalb . . . . . u. zwar in	b
+	−	+	. . . . .	c
−	+	+	. . . . .	d
+	−	−	. . . . .	e
−	+	−	. . . . .	f
−	−	+	. . . . .	g

Hierbei wird übrigens vorausgesetzt, dass wenn FG der Durchschnitt der Ebene $z_1\ z_2\ z_3$ mit der Ebene $X\ Y$ (Fig. 27) und $F'\ G'$ der Durchschnitt der Ebene $z'_1\ z'_2\ z'_3$ mit derselben Ebene $X\ Y$ ist, und FP_4F' den Winkel darstellt, in welchem z und z' positiv sind, FP_4 links und $F'P_4$ rechts liegt. Läge umgekehrt FP_4 rechts und $F'P_4$ links, was einer Vertauschung der akzentuirten mit den nicht akzentuirten Grössen entspricht; so würden die vorstehenden Regeln gelten, indem man alle Zeichen von Z_{12}, Z_{23}, Z_{31} in die entgegengesetzten verwandelte.

Fig. 27.



Allgemein liegt also P_4 nur dann innerhalb des Dreieckes, wenn die drei Grössen Z_{12}, Z_{23}, Z_{31} gleiche Zeichen haben.

Wenn der Punkt P_4 bestimmt ist; so lässt sich schon aus den blossen Zeichen der Höhenordinaten z_4, z'_4 die Gegend erkennen, in welcher der zunächst zu suchende Punkt P_5 liegen wird. Hierzu ist übrigens die Konstruktion der in P_4 sich kreuzenden Durchschnittslinien FG und $F'G'$ erforderlich. Dieselben lassen sich leicht durch die Punkte H, J verzeichnen, in welchen sie zwei benachbarte Dreiecksseiten wie P_1P_2, P_1P_3 durchschneiden. Ein solcher Durchschnittspunkt H zwischen FG und P_1P_2 findet sich aber einfach durch die Formel

$$a = \frac{z_1}{z_1 - z_2}\, r$$

Hierin bezeichnet r die absolute Länge der Seite P_1P_2 und a den Abstand des Punktes H von P_1. Ist a positiv; so liegt H in der Richtung von P_1 gegen P_2: ist dagegen a negativ; so liegt H auf der entgegengesetzten Seite von P_1. Die Höhenordinaten sind immer mit ihren wahren Zeichen zu nehmen.

Sind nun die Zeichen der Höhenordinaten z_4 und z'_4, welche dem Punkte P_4 in den beiden Flächen $F(x, y)$ und $F'(x, y)$ angehören, von der Art, wie sie den Höhenordinaten der beiden Ebenen $z_1\ z_2\ z_3$ und $z'_1\ z'_2\ z'_3$ in irgend einem der vier Winkel FP_4F', $F'P_4G$, GP_4G', $G'P_4F$ entsprechen würden; so fällt der Punkt P_5 immer in den entgegengesetzten Winkel. Ist also

z_4	z'_4		
+	+	so liegt P_5 in dem Winkel	GP_4G'
+	—	. . . . .	$G'P_4F$
—	—	. . . . .	FP_4F'
—	+	. . . . .	$F'P_4G$

gleichviel, ob man den Punkt P_5 aus den Ecken des Dreieckes $P_4 P_1 P_2$ oder $P_4 P_2 P_3$ oder $P_4 P_3 P_1$ konstruirt (womit natürlich nicht gesagt sein soll, dass Diess immer identisch einunddenselben Punkt ergäbe).

III.

Die komplexen Wurzeln der algebraischen Gleichungen mit einer und zwei Unbekannten.

§. 17.

Gewöhnliches Verfahren zur Bestimmung der komplexen Wurzeln einer Gleichung mit einer Unbekannten.

Um die komplexen Wurzeln der Gleichung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

zu finden, braucht man nur $x = y + z\sqrt{-1}$ zu substituiren und das Reelle vom Imaginären zu trennen. Diess giebt zwei Gleichungen, welche nach z geordnet die Gestalt

$$Y_0 z^n + Y_2 z^{n-2} + Y_4 z^{n-4} + \ldots = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$Y_1 z^{n-1} + Y_3 z^{n-3} + Y_5 z^{n-5} + \ldots = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

annehmen. Hierin bezeichnet allgemein Y_r eine Funktion $r$ten Grades von y. Wenn n paar $= 2m$ ist, lässt sich die Gleichung (3) durch z dividiren, und man erhält

$$Y_0 z^{2m} + Y_2 z^{2(m-1)} + Y_4 z^{2(m-2)} + \ldots + Y_{2(m-1)} z^2 + Y_{2m} = 0 \quad (4)$$

$$Y_1 z^{2(m-1)} + Y_3 z^{2(m-2)} + Y_5 z^{2(m-3)} + \ldots + Y_{2m-3} z^2 + Y_{2m-1} = 0 \quad (5)$$

Wenn dagegen n unpaar $= 2m + 1$ ist, so lässt sich die Gleichung (2) durch z dividiren, und man erhält

$$Y_0 z^{2m} + Y_2 z^{2(m-1)} + Y_4 z^{2(m-2)} + \ldots + Y_{2(m-1)} z^2 + Y_{2m} = 0 \quad (6)$$

$$Y_1 z^{2m} + Y_3 z^{2(m-1)} + Y_5 z^{2(m-2)} + \ldots + Y_{2m-1} z^2 + Y_{2m+1} = 0 \quad (7)$$

In beiden Fällen ergeben die reellen Auflösungen der beiden Gleichungen (4), (5) oder (6), (7) für y und z die beiden Theile der komplexen Wurzeln $x = y + z\sqrt{-1}$ der Gleichung (1). Man kann

nicht erwarten, dass die reellen Auflösungen jener beiden Gleichungen auch die reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung (1), für welche $z = 0$ sein müsste, mit umschliessen. Diese reellen Wurzeln von (1) sind zwar noch in (2) und (3), aber nicht mehr in (4) und (5) oder in (6) und (7) enthalten, weil die Division mit z ausdrücklich voraussetzt, dass z nicht gleich null, die Wurzel x also wirklich komplex sei. Ebenso wenig können die etwaigen komplexen Auflösungen jener beiden Gleichungen die reellen Wurzeln von (1) ergeben: denn Diess setzte voraus, dass y oder z oder beide imaginär oder komplex seien, eine Voraussetzung, welche die Zerlegung der Gleichung (1) in die beiden Gleichungen (2) und (3) ganz unstatthaft machen würde.

Während also die reellen Wurzeln von (1) durch direkte Auflösung dieser Gleichung für reelle Zahlen erhalten werden, findet man ausschliesslich die komplexen Wurzeln durch die reellen Auflösungen der beiden Gleichungen (4), (5) oder (6), (7).

Hiermit ist übrigens nicht gesagt, dass eine anderweite Zerlegung der Gl. (1) nicht geeignet sei, sowohl die reellen, wie auch die komplexen Wurzeln zu ergeben. Diess ist sehr wohl möglich, wie wir weiter unten sehen werden.

Die Gleichungen (4), (5) oder (6), (7) enthalten nur paare Potenzen von z, wie es auch sein muss, da bekanntlich die komplexen Wurzeln in jeder Gleichung mit reellen Koeffizienten paarweise in der Form $y + z\sqrt{-1}$ und $y - z\sqrt{-1}$ vorkommen. Man kann also z^2 als die eine Unbekannte ansehen, wodurch der Grad jener Gleichungen für diese Unbekannte auf die Hälfte reduzirt wird. Dieser Umstand motivirt es auch, jene Gleichungen nach z als Hauptgrösse zu ordnen.

Die Auflösung der beiden Gleichungen für y und z kann nach dem vorhergehenden Abschnitte bewirkt werden, indem man entweder nach §. 11 die eine Unbekannte eliminirt und die Finalgleichung für die andere auflöst, oder indem man das unmittelbare Verfahren aus §. 15 in Anwendung bringt.

§. 18.

Auflösungsverfahren, welches gleichzeitig die reellen und die komplexen Wurzeln ergiebt.

Der dem Auflösungsverfahren zu Grunde liegende Gedanke ist die Zerlegung der gegebenen Funktion in Faktoren ersten Grades von der Form $x - r$. Jenachdem nun r reell oder komplex ist, nimmt das Verfahren eine verschiedene Gestalt an. Ginge man aber darauf aus, die gegebene Funktion in quadratische Faktoren von der Form

$$x^2 + c_1 x + c_2$$

zu zerlegen; so würde das Verfahren für reelle und komplexe Wurzeln einunddasselbe sein. Denn hat man alle zusammengehörigen reellen Werthe von c_1 und c_2 bestimmt; so ergiebt die Auflösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 + c_1 x + c_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

also der Ausdruck

$$x = -\frac{c_1}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{c_1}{2}\right)^2 - c_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

je zwei reelle Wurzeln, sobald $\left(\frac{c_1}{2}\right)^2 - c_2$ positiv ist, und je zwei komplexe, sobald $\left(\frac{c_1}{2}\right)^2 - c_2$ negativ ist.

Wäre die gegebene Gleichung von unpaarem Grade; so sondert sich neben den quadratischen Faktoren von selbst noch ein Faktor ersten Grades ab, welcher diejenige Wurzel bestimmt, welche in einer solchen Gleichung immer reell sein muss.

Um die Zerlegung der Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

in quadratische Faktoren zu bewirken, bilden wir das Produkt aus einer Form vom Grade $n - 2$ und dem obigen quadratischen Faktor in allgemeinen Zeichen, multipliziren also

$$x^{n-2} + b_1 x^{n-3} + b_2 x^{n-4} + \ldots + b_{n-3} x + b_{n-2} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

mit $x^2 + c_1 x + c_2$

Diess giebt

$$\begin{aligned} x^n &+ (b_1 + c_1) x^{n-1} + (b_2 + b_1 c_1 + c_2) x^{n-2} + (b_3 + b_2 c_1 + b_1 c_2) x^{n-3} \\ &+ (b_4 + b_3 c_1 + b_2 c_2) x^{n-4} + \ldots + (b_{n-3} + b_{n-4} c_1 + b_{n-5} c_2) x^3 \\ &+ (b_{n-2} + b_{n-3} c_1 + b_{n-4} c_2) x^2 + (b_{n-2} c_1 + b_{n-3} c_2) x + b_{n-2} c_2 \end{aligned}$$

Setzt man die Koeffizienten dieses Produktes den Koeffizienten der gegebenen Gleichung (3) gleich; so erhält man

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 + c_1 \\ a_2 &= b_2 + b_1 c_1 + c_2 \\ a_3 &= b_3 + b_2 c_1 + b_1 c_2 \\ a_4 &= b_4 + b_3 c_1 + b_2 c_2 \\ a_5 &= b_5 + b_4 c_1 + b_3 c_2 \\ &\vdots \\ a_{n-3} &= b_{n-3} + b_{n-4} c_1 + b_{n-5} c_2 \\ a_{n-2} &= b_{n-2} + b_{n-3} c_1 + b_{n-4} c_2 \\ a_{n-1} &= b_{n-2} c_1 + b_{n-3} c_2 \\ a_n &= b_{n-2} c_2 \end{aligned}$$

Aus diesen n Gleichungen sind zunächst die $n - 2$ Grössen b_1, $b_2 \ldots b_{n-2}$ zu eliminiren. Diess giebt zwei Gleichungen für c_1 und c_2, aus welchen man also erst c_1 eliminiren und dann durch direkte Auflösung der Finalgleichung c_2 bestimmen kann, oder was einfacher ist, erst c_2 eliminiren und durch direkte Auflösung der Finalgleichung c_1 bestimmen kann.

Die Elimination der Grössen b geht am leichtesten folgendermassen von statten. Aus der 1sten, 2ten, 3ten . . . $n$ten Gleichung folgt

$$\left.\begin{aligned}
b_1 &= a_1 - c_1 \\
b_2 &= a_2 - b_1 c_1 - c_2 \\
b_3 &= a_3 - b_2 c_1 - b_1 c_2 \\
b_4 &= a_4 - b_3 c_1 - b_2 c_2 \\
b_5 &= a_5 - b_4 c_1 - b_3 c_2 \\
&\vdots \\
b_{n-2} &= a_{n-2} - b_{n-3} c_1 - b_{n-4} c_2 \\
0 &= a_{n-1} - b_{n-2} c_1 - b_{n-3} c_2 \\
0 &= a_n - b_{n-2} c_2
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (5)$$

Substituirt man jetzt den Werth von b_1 in b_2, dann den von b_1 und b_2 in b_3, dann den von b_2 und b_3 in b_4 u. s. w., schliesslich aber den Werth von b_{n-3} und b_{n-2} in die vorletzte Gleichung und den Werth von b_{n-2} in die letzte Gleichung; so ergeben diese letzten beiden Gleichungen die gesuchten Beziehungen für c_1 und c_2.

Es hätte keine Schwierigkeit, diese beiden Endgleichungen für einen allgemeinen Werth des Exponenten n zu entwickeln. Die Anwendung der hierdurch entstehenden komplizirten Form ist jedoch nicht so bequem, als die Ausführung des oben beschriebenen Substitutionsverfahrens für die sukzessiven speziellen Werthe 3, 4, 5 . . . von n. Bis zu dem Werthe $n = 8$ sind sofort die nachstehenden Formeln zu gebrauchen.

$$b_1 = (a_1 - c_1) \quad \ldots \ldots (6)$$

$$b_2 = (a_2 - a_1 c_1 + c_1^2) - c_2$$

$$b_3 = (a_3 - a_2 c_1 + a_1 c_1^2 - c_1^3) - (a_1 - 2 c_1)\, c_2$$

$$b_4 = (a_4 - a_3 c_1 + a_2 c_1^2 - a_1 c_1^3 + c_1^4) - (a_2 - 2 a_1 c_1 + 3 c_1^2)\, c_2 + c_2^2$$

$$b_5 = (a_5 - a_4 c_1 + a_3 c_1^2 - a_2 c_1^3 + a_1 c_1^4 - c_1^5) - (a_3 - 2 a_2 c_1 + 3 a_1 c_1^2 - 4 c_1^3)\, c_2 + (a_1 - 3 c_1)\, c_2^2$$

$$b_6 = (a_6 - a_5 c_1 + a_4 c_1^2 - a_3 c_1^3 + a_2 c_1^4 - a_1 c_1^5 + c_1^6) - (a_4 - 2 a_3 c_1 + 3 a_2 c_1^2 - 4 a_1 c_1^3 + 5 c_1^4)\, c_2 + (a_2 - 3 a_1 c_1 + 6 c_1^2)\, c_2^2 - c_2^3$$

$$b_7 = (a_7 - a_6 c_1 + \ldots - c_1^7) - (a_5 - 2 a_4 c_1 + \ldots - 6 c_1^5)\, c_2 + (a_3 - 3 a_2 c_1 + 6 a_1 c_1^2 - 10 c_1^3)\, c_2^2 - (a_1 - 4 c_1)\, c_2^3$$

$$b_8 = (a_8 - a_7 c_1 + \ldots + c_1^8) - (a_6 - 2 a_5 c_1 + \ldots + 7 c_1^6)\, c_2 + (a_4 - 3 a_3 c_1 + 6 a_2 c_1^2 - 10 a_1 c_1^3 + 15 c_1^4)\, c_2^2 - (a_2 - 4 a_1 c_1 + 10 c_1^2)\, c_2^3 + c_2^4$$

Handelt es sich also z. B. um eine Gleichung vom Grade $n = 7$; so erhält man die beiden gesuchten Gleichungen, indem man die Werthe von b_6 und b_7 gleich null setzt. Die letzte dieser beiden Gleichungen kann jedoch immer vereinfacht werden. Diese vereinfachte Form ergiebt sich aus den Werthen von $b_m + b_{m-1}c_1$. Dieselben sind.

$$b_2 + b_1 c_1 = a_2 - c_2 \quad \ldots\ldots (7)$$
$$b_3 + b_2 c_1 = a_3 - (a_1 - c_1) c_2$$
$$b_4 + b_3 c_1 = a_4 - (a_2 - a_1 c_1 + c_1^2) c_2 + c_2^2$$
$$b_5 + b_4 c_1 = a_5 - (a_3 - a_2 c_1 + a_1 c_1^2 - c_1^3) c_2 + (a_1 - 2c_1) c_2^2$$
$$b_6 + b_5 c_1 = a_6 - (a_4 - a_3 c_1 + a_2 c_1^2 - a_1 c_1^3 + c_1^4) c_2 + (a_2 - 2a_1 c_1 + 3c_1^2) c_2^2 - c_2^3$$
$$b_7 + b_6 c_1 = a_7 - (a_5 - a_4 c_1 + \ldots - c_1^5) c_2 + (a_3 - 2a_2 c_1 + 3a_1 c_1^2 - 4c_1^3) c_2^2 - (a_1 - 3c_1) c_2^3$$
$$b_8 + b_7 c_1 = a_8 - (a_6 - a_5 c_1 + \ldots + c_1^6) c_2 + (a_4 - 2a_3 c_1 + 3a_2 c_1^2 - 4a_1 c_1^3 + 5c_1^4) c_2^2 - (a_2 - 3a_1 c_1 + 6c_1^2) c_2^3 + c_2^4$$

Ist also beispielsweise $n = 7$ gegeben; so nimmt man die Gleichung für $b_6 = 0$ aus der Gruppe (6) und die Gleichung für $b_7 + b_6 c_1 = 0$ aus der Gruppe (7).

§. 19.

Anwendung der vorstehenden Formeln auf Gleichungen vom 3ten, 4ten, 5ten und 6ten Grade.

Ist die kubische Gleichung

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

gegeben, also $n = 3$; so hat man für $b_2 = 0$ aus der Gruppe (6) und für $b_3 + b_2 c_1 = 0$ aus der Gruppe (7)

$$(a_2 - a_1 c_1 + c_1^2) - c_2 = 0$$
$$a_3 - (a_1 - c_1) c_2 = 0$$

Hieraus folgt durch Elimination von c_2

$$c_1^3 - 2a_1 c_1^2 + (a_1^2 + a_2) c_1 - (a_1 a_2 - a_3) = 0$$

und wenn hieraus c_1 berechnet ist, ergiebt sich c_2 durch die einfache Formel

$$c_2 = \frac{a_3}{a_1 - c_1}$$

oder auch durch die Formel

$$c_2 = a_2 - a_1 c_1 + c_1^2$$

Die dritte Wurzel r der gegebenen Gleichung, welche immer reell sein wird, gleich vielob die anderen beiden reell oder komplex

sind, ist wegen des Faktors $x + b_1 = 0$ und nach der ersten Gleichung der Gruppe (6)

$$r = -b_1 = c_1 - a_1$$

oder auch

$$r = -\frac{a_3}{c_2}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen ergiebt sich die interessante Thatsache, dass wenn die eine reelle Wurzel r, welche die kubische Gleichung jedenfalls hat, berechnet ist, die anderen beiden, sie mögen reell oder komplex sein, vermittelst der Werthe

$$c_1 = r + a_1$$

$$c_2 = -\frac{a_3}{r}$$

sofort nach der Formel (2) berechnet werden können. Dieselben sind also

$$x = -\frac{r + a_1}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{r + a_1}{2}\right)^2 + \frac{a_3}{r}}$$

Hiernach ist es also schlechterdings unnöthig, zur Bestimmung der komplexen Wurzeln einer kubischen Gleichung eine besondere Operation zu unternehmen. Wenn man die eine reelle Wurzel gefunden hat, ergeben sich die anderen beiden reellen oder komplexen Wurzeln durch die letzte ganz einfache Formel.

Nachdem man z. B. für die Gleichung

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

die eine Wurzel $x = 1$ gefunden hat, ergeben sich die andern beiden durch die Formel

$$x = \frac{5}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6} = 2 \text{ und } 3$$

Oder nachdem für die Gleichung

$$x^3 + 3x^2 + 9x - 13 = 0$$

die Wurzel $x = 1$ ermittelt ist, sind die anderen beiden

$$x = -2 \mp \sqrt{2^2 - 13} = 2 \mp 3\sqrt{-1}$$

Fehlt in der gegebenen Gleichung das zweite Glied, ist also $a_1 = 0$; so vereinfachen sich die vorstehenden Formeln auf folgende

$$c_1^3 + a_2 c_1 + a_3 = 0$$

$$c_2 = -\frac{a_3}{c_1} = a_2 + c_1^2$$

$$r = c_1 = -\frac{a_3}{c_2}$$

$$c_1 = r$$

$$c_2 = -\frac{a_3}{r}$$

2. Ist die Gleichung vierten Grades

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$$

gegeben; so hat man wegen $b_3 = 0$ und $b_4 + b_3 c_1 = 0$ die beiden Gleichungen

$$(a_3 - a_2 c_1 + a_1 c_1^2 - c_1^3) - (a_1 - 2 c_1) c_2 = 0$$
$$a_4 - (a_2 - a_1 c_1 + c_1^2) c_2 + c_2^2 = 0$$

Eine Elimination von c_2 ergiebt zur Berechnung von c_1

$$c_1^6 - 3 a c_1^5 + (3 a_1^2 + 2 a_2) c_1^4 - a_1 (a_1^2 + 4 a_2) c_1^3 + (2 a_1^2 a_2 + a_1 a_3 + a_2^2 - 4 a_4) c_1^2 - a_1 (a_1 a_3 + a_2^2 - 4 a_4) c_1 + (a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2) = 0$$

Wenn hieraus ein Werth von c_1 gefunden ist; so erhält man den zugehörigen Werth von c_2 durch die Formel

$$c_2 = \frac{c_1^3 - a_1 c_1^2 + a_2 c_1 - a_3}{2 c_1 - a_1} = \frac{1}{2}\left(c_1^2 - \frac{a_1 c_1^2 - 2 a_2 c_1 + 2 a_3}{2 c_1 - a_1}\right)$$

Übrigens lässt sich die vorstehende Gleichung 6ten Grades für c_1 dadurch bedeutend abkürzen, dass man durch die Substitution

$$c' = c_1 + \frac{a_1}{2}$$

das zweite Glied fortschafft. Durch diese Operation verschwinden nämlich alle Glieder unpaaren Grades und man erhält

$$c'^6 - (\tfrac{3}{4} a_1^2 - 2 a_2) c'^4 + (\tfrac{3}{16} a_1^4 - a_1^2 a_2 + a_1 a_3 + a_2^2 - 4 a_4) c'^2 - (\tfrac{1}{16} a_1^6 - \tfrac{1}{8} a_1^4 a_2 + \tfrac{1}{4} a_1^3 a_3 + \tfrac{1}{4} a_1^2 a_2^2 - a_1 a_2 a_3 + a_3^2) = 0$$

Wenn in der gegebenen Gleichung das zweite Glied fehlt, also $a_1 = 0$ ist; so vereinfachen sich die ersteren Formeln folgendermassen

$$c_1^6 + 2 a_2 c_1^4 + (a_2^2 - 4 a_4) c_1^2 - a_3^2 = 0$$
$$c_2 = \frac{c_1^3 + a_2 c_1 - a_3}{2 c_1} = \frac{1}{2}\left(c_1^2 + a_2 - \frac{a_3}{c_1}\right)$$

3. Ist die Gleichung fünften Grades

$$x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0$$

gegeben, so hat man wegen $b_4 = 0$ und $b_5 + b_4 c_1 = 0$

$$(a_4 - a_3 c_1 + a_2 c_1^2 - a_1 c_1^3 + c_1^4) - (a_2 - 2 a_1 c_1^2 + 3 c_1^2) c_2 + c_2^2 = 0$$
$$a_5 - (a_3 - a_2 c_1 + a_1 c_1^2 - c_1^3) c_2 + (a_1 - 2 c_1) c_2^2 = 0$$

Die Rechnung vereinfacht sich auch hier, wenn man gleich von vorn herein aus der gegebenen Gleichung das zweite Glied fortschafft. Für diesen Fall, wo also $a_1 = 0$ ist, hat man

$$(a_4 - a_3 c_1 + a_2 c_1^2 + c_1^4) - (a_2 + 3 c_1^2) c_2 + c_2^2 = 0$$
$$a_5 - (a_3 - a_2 c_1 - c_1^3) c_2 - 2 c_1 c_2^2 = 0$$

Die durch Elimination von c_2 sich ergebende Gleichung 10ten Grades ist

$$c_1^{10} + 3a_2c_1^8 + a_3c_1^7 + 3(a_2^2 - a_4)c_1^6 + (2a_2a_3 - 11a_5)c_1^5 + (a_2^3 - 2a_2a_4 - a_3^2)c_1^4 + (a_2^2a_3 - 4a_2a_5 - 4a_3a_4)c_1^3 + (a_2^2a_4 + 7a_3a_5 - a_2a_3^2 - 4a_4^2)c_1^2 + (4a_4a_5 - a_2^2a_5 - a_3^3)c_1 + (a_2a_3a_5 - a_3^2a_4 - a_5^2) = 0$$

Zur Berechnung von c_2 hat man

$$c_2 = \frac{2(c_1^5 + a_2c_1^3 - a_3c_1^2 + a_4c_1) + a_5}{5c_1^3 + a_2c_1 + a_3}$$

4. Ist die Gleichung sechsten Grades

$$x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6 = 0$$

gegeben; so hat man wegen $b_5 = 0$ und $b_6 + b_5c_1 = 0$

$$(a_5 - a_4c_1 + a_3c_1^2 - a_2c_1^3 + a_1c_1^4 - c_1^5) - (a_3 - 2a_2c_1 + 3a_1c_1^2 - 4c_1^3)c_2 + (a_1 - 3c_1)c_2^2 = 0$$

$$a_5 - (a_4 - a_3c_1 + a_2c_1^2 - a_1c_1^3 + c_1^4)c_2 + (a_2 - 2a_1c_1 + 3c_1^2)c_2^2 - c_2^3 = 0$$

Wenn man aus diesen beiden Gleichungen c_2 nach dem gewöhnlichen Divisionsverfahren eliminirt; so ergiebt sich eine Gleichung vom 17ten Grade für c_1. Nach §. 12 ist dieselbe aber durch den quadratischen Faktor $(a_1 - 3c_1)^2$ theilbar, wodurch man die wahre Endgleichung vom 15ten Grade erhält. Dieselbe vereinfacht sich noch dadurch, dass man gleich von vorn herein aus der gegebenen Gleichung das zweite Glied fortschafft, wodurch $a_1 = 0$ wird. Wir lassen diese Elimination auf sich beruhen, da die Endgleichung theils wegen ihres hohen Grades, theils wegen der Komplikation ihrer Koeffizienten für den praktischen Gebrauch unbequem ist und das in §. 20 und 21 zu beschreibende Verfahren für die Anwendung bedeutende Vorzüge hat.

§. 20.

Ermittlung eines Näherungswerthes für jede reelle oder komplexe Wurzel einer in allgemeinster Form mit reellen oder komplexen Koeffizienten gegebenen Gleichung.

Für die Berechnung einer komplexen Wurzel nach dem direkten Verfahren, welches ich im nächstfolgenden Paragraphen beschreiben werde, ist die Kenntniss der Anfangsziffer des reellen und des imaginären Theiles von x erforderlich. Diese Ziffern findet man folgendermassen. Die gegebene Gleichung sei

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

Die Koeffizienten $a_n, a_{n-1} \ldots$ können reelle oder komplexe Zahlen sein.

Substituirt man für x eine Zahl von der allgemeinen Form

$$x = y + z\sqrt{-1}$$

so nimmt $f(x)$ immer die Gestalt

$$f(y + z\sqrt{-1}) = Y + Z\sqrt{-1}$$

an. Ist nun $y + z\sqrt{-1}$ eine Wurzel; so muss sowohl

$$Y = 0 \quad \text{als auch} \quad Z = 0$$

sein.

Nimmt man jetzt für y irgend eine konstante ganze Zahl an und lässt z die Reihe der positiven und negativen ganzen Zahlen durchlaufen; so erhält man für Y und Z zwei Zahlenreihen. Für jede Reihe ermittelt man die Stelle, wo ein Zeichenwechsel eintritt, und notirt die entsprechenden Grenzwerthe von z.

Lässt man nun y allmählich in die benachbarten Zahlen übergehen und nimmt mit z dieselbe Variation vor, ermittelt auch wieder die Stellen, wo die Zeichenwechsel in den Werthen von Y und Z stattfinden; so hat man durch die entsprechenden Grenzwerthe von y, z einmal die Koordinaten einer Kurve, deren Gleichung

$$Y = 0$$

ist, und einmal die Koordinaten einer Kurve, deren Gleichung

$$Z = 0$$

ist, gefunden.

Trägt man beide Kurven nach §. 14 auf; so bestimmen die Koordinaten y, z eines jeden gemeinschaftlichen Durchschnittspunktes eine Wurzel $x = y + zi$ der gegebenen Gleichung (indem wir von jetzt zur Abkürzung das Zeichen i für $\sqrt{-1}$ setzen).

Es kömmt vorläufig nur auf die Grenzwerthe an, zwischen welchen eine solche Wurzel liegt. Dieselben können schon aus einer tabellarischen Zusammenstellung der Werthe von Y und Z erkannt werden: die graphische Darstellung erleichtert aber die Übersicht.

Um für ein konstantes y die aus der Variation von z sich ergebenden Werthe von Y und Z oder die Grösse $Y + Zi$ zu erhalten, kann man die Differenzenreihen in ganz gewöhnlicher Weise anwenden. Wäre z. B. die Gleichung

$$x^2 + 2x + 3 = Y + Zi = 0$$

gegeben, und wollte man für $y = 2$ die Werthe der Substitution $x = 2 + zi$ darstellen, worin z die Reihe der ganzen Zahlen durchläuft; so hätte man folgende Rechnung

$x =$	$2+0i$	$2+i$	$2+2i$	$2+3i$	$2+4i\ldots$
$Y+Zi =$	11	$10+6i$	$7+12i$	$2+18i$	$-5+24i\ldots$
erste Differenzreihe		$-1+6i$	$-3+6i$	$-5+6i$	$-7+6i$ $\ldots$
zweite Differenzreihe			-2	-2	-2 $\ldots$

Da es nur auf die Ermittlung der Zeichenwechsel von Y und Z ankömmt; so wird man hier, wie in §. 14, für jeden folgenden Werth von y immer nur diejenige kleinste Anzahl Werthe von z substituiren, zwischen welchen die neuen Zeichenwechsel zu erwarten sind, welche also in der Nachbarschaft der für den vorhergehenden Werth von y ermittelten Werthe von z liegen.

Nur für den zuerst angenommenen Werth von y, wozu man in der Regel den Werth null wählen wird, kann eine ausgedehntere Reihe Werthe von z nothwendig werden. Will man nun die Anfangsziffern der Grössen y und z ermitteln; so wird man y und z nicht in der unendlichen Reihe der ganzen Zahlen, sondern erst in der Reihe der Einer, dann der Zehner, dann der Hunderter u. s. w., dann der Zehntel, dann der Hundertstel u. s. w., soweit Diess zur Entdeckung der Zeichenwechsel nothwendig erscheint, variiren lassen.

Wie in §. 14; so können auch hier die Grenzen, zwischen welchen der wahre Werth einer Wurzel liegt, zweifelhaft erscheinen, auch können zuweilen in demselben Quadrate mehrere Durchschnittspunkte der Kurven liegen, was dem Falle entspricht, wo mehrere Wurzeln dieselben Anfangsziffern von y oder z haben. Die Entscheidung erfolgt dann hier, durch ein ähnliches Verfahren, wie in §. 14, nöthigenfalls durch engere Zusammenziehung der Grenzen. Diese Operation ist aber hier einfacher als dort, weil man Y und Z immer durch einunddieselbe Substitution $y + zi$ in die gegebene Gleichung erhält.

Da jede Gleichung $n$ten Grades n Wurzeln haben muss; so wird man die vorstehende Ermittlung auf die Grenzbestimmung aller n Wurzeln richten müssen, wenn sie vollständig sein soll. Bei einer Gleichung mit reellen Koeffizienten kann man natürlich die Grenzen der reellen Wurzeln durch das gewöhnliche Verfahren leichter finden.

§. 21.

Direkte Berechnung der reellen und der komplexen Wurzeln, die Koeffizienten der gegebenen Gleichung mögen reell sein oder komplex.

1. Weit leichter als durch alle bisherigen Methoden lassen sich die komplexen Wurzeln einer Gleichung direkt durch folgendes Verfahren berechnen.

Wir setzen voraus, für die Wurzel $x = y + zi$ sei bereits die Anfangsziffer r des reellen Theils y und die Anfangsziffer s des imaginären Theiles zi nach §. 20 ermittelt. Wenn y oder z negativ wäre, würden wir unter r oder s nicht den nummerischen, sondern den negativen Werth der betreffenden Ziffer verstehen, was in ähnlicher

Weise auch von den folgenden Ziffern gilt. Hätte man z. B. $x = -32{,}6 + 0{,}43\,i$; so wäre $r = -30$ und $s = 0{,}4$.

Jetzt stellen wir aus der gegebenen Gleichung

$$a_n x + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

die erste transformirte Gleichung

$$a'_n x'^n + a'_{n-1} x'^{n-1} + \ldots + a'_1 x' + a'_0 = 0$$

her, deren Wurzeln um $r + s\,i$ kleiner sind, als die der gegebenen, sodass wir also

$$x' = x - (r + s\,i)$$

haben.

Diese Operation führen wir ganz nach §. 6 aus, indem wir die gegebene Gleichung nach §. 5 wiederholt durch $x - (r + s\,i)$ dividiren.

Die Koeffizienten der transformirten Gleichung werden jetzt im Allgemeinen komplexe Werthe annehmen.

Es sei demnach die gegebene Gleichung ganz allgemein

$$(a_n + b_n i)\,x^n + (a_{n-1} + b_{n-1} i)\,x^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1 i)\,x + (a_0 + b_0 i) = 0$$

Durch das bezeichnete Divisionsverfahren ergiebt sich die erste transformirte Gleichung

$$(a'_n + b'_n i)\,x'^n + (a'_{n-1} + b'_{n-1} i)\,x'^{n-1} + \ldots + (a'_1 + b'_1 i)\,x' + (a'_0 + b'_0 i) = 0$$

Hieraus folgt genau wie in §. 7 als Näherungswerth von x'

$$x' = -\frac{a'_0 + b'_0 i}{a'_1 + b'_1 i}$$

Um aus diesem Ausdrucke die zweiten Ziffern r', s' von y, z zu bestimmen, bringt man denselben durch Multiplikation mit $a'_1 - b'_1 i$ in Zähler und Nenner auf die Form

$$x' = \frac{-(a_0 a_1 + b_0 b_1)}{a_1^2 + b_1^2} + \frac{a_0 b_1 - b_0 a_1}{a_1^2 + b_1^2}\,i$$

Wenn man über die Richtigkeit der Ziffern r', s' zweifelhaft ist, muss man dieselben nach §. 15 Nr. 2 kontroliren und eventuell rektifiziren. Übrigens macht sich eine falsche Ziffer im ferneren Verlaufe der Rechnung gewöhnlich bald dadurch kenntlich, dass man für eine spätere Ziffer einen Werth $\geqq 10$ oder einen solchen erhält, dessen Zeichen das entgegengesetzte von dem Zeichen der vorhergehenden Ziffern ist.

2. Als Beispiel sei die Gleichung

$$x^3 + 7{,}42\,x^2 + 15{,}58\,x - 24 = 0$$

gegeben. Die Anfangsziffern der einen komplexen Wurzel sind $r = -4$, $s = 2$. Die Wurzeln sind also um $-4 + 2i$ zu vermindern. Durch die Nebenrechnung, welche weiter unten mitgetheilt ist, findet man für

die zweiten Ziffern $r' = -0{,}2$ $s' = 0{,}5$ alsdann für die dritten $r'' = -0{,}01$ $s'' = 0{,}00$. Bei weiterer Rechnung werden die Ziffern des reellen Theiles stets $= 0$; die vierte des imaginären Theiles ist aber $5''' = 0{,}005$. Die Rechnung ist hiernach folgende.

1	7,42	15,58	−24	$(-4+2i$
	$-4 \quad +2i$	$-17{,}68 \quad +1{,}16i$	$10{,}72 \quad +0{,}44i$	
1	$3{,}42+2i$	$-2{,}10 \quad -1{,}16i$	$-13{,}28 \quad +0{,}44i$	$(-0{,}2$
	$-4 \quad +2i$	$-5{,}68 \quad -17{,}16i$	$13{,}0198-0{,}635i$	$+0{,}5i$
1	$-0{,}58+4i$	$-7{,}78 \quad -18{,}32i$	$-0{,}2602-0{,}195i$	$(-0{,}01$
	$-4 \quad +2i$	$-2{,}249 \quad -3{,}69i$	$0{,}1252+0{,}2597i$	$+0{,}00i$
1	$-4{,}58+6i$	$-10{,}074 \quad -22{,}01i$	$-0{,}135 \quad +0{,}0647i$	$(-0{,}000$
	$-0{,}2 \quad +0{,}5i$	$-2{,}504 \quad -3{,}89i$		$+0{,}005i$
1	$-4{,}78+6{,}5i$	$-12{,}578 \quad -25{,}9i$		
	$-0{,}2 \quad +0{,}5i$	$0{,}0519 \quad -0{,}075i$		
1	$-4{,}98+7i$	$-12{,}5261 \quad -25{,}975i$		
	$-0{,}2 \quad +0{,}5i$	$0{,}0520 \quad -0{,}075i$		
1	$-5{,}18+7{,}5i$	$-12{,}4741 \quad -26{,}05i$		
	$-0{,}01$			
1	$-5{,}19+7{,}5i$			
	$-0{,}01$			
1	$-5{,}20+7{,}5i$			
	$-0{,}01$			
1	$-5{,}21+7{,}5i$			

Die Nebenrechnungen sind

$$r'+s'i = \frac{-13{,}28+0{,}44i}{7{,}78+18{,}32i} = -\frac{95{,}26}{396}+\frac{246{,}7}{396}i = -0{,}2+0{,}6i$$

eine Korrektion verwandelt die Ziffer s' jedoch in 0,5, sodass man

$$r'+s'i = -0{,}2+0{,}5i$$

hat.

$$r''+s''i = \frac{0{,}2602+0{,}195i}{12{,}578+25{,}9i} = -\frac{8{,}323}{829}+\frac{4{,}286}{829}i = -0{,}01+0{,}00i$$

$$r'''+s'''i = \frac{-0{,}135+0{,}0647i}{12{,}47+26{,}05i} = \frac{0{,}00198}{832}+\frac{4{,}323}{832}i = 0{,}00000 + 0{,}0051i$$

Die gesuchte Wurzel ist also, auf vier Dezimalen genau

$$x = -4{,}21+2{,}5051\sqrt{-1}$$

mithin die zweite komplexe Wurzel

$$x = -4{,}21 - 2{,}5051\sqrt{-1}$$

Da der Koeffizient des zweiten Gliedes den negativen Werth der Summe aller drei Wurzeln darstellt; so ist die dritte Wurzel

$$x = -7{,}42 + 8{,}42 = 1$$

§. 22.

Anwendung der Regula falsi auf die Berechnung der komplexen Wurzeln.

Wenn drei durch $x_1 = y_1 + z_1 i \quad x_2 = y_2 + z_2 i \quad x_3 = y_3 + z_3 i$ bestimmte Punkte bekannt sind, zwischen welchen eine Wurzel $x = y + zi$ der gegebenen Gleichung

$$f(x + zi) = Y + Zi = 0$$

liegt; so findet man einen genaueren Werth $x_4 = y_4 + z_4 i$ für diese Wurzel nach den in §. 16 mitgetheilten Formeln. Es ist nämlich bei der jetzigen Bezeichnung

$$y_4 + z_4 i = \frac{y_1(Y_2Z_3 - Y_3Z_2) + y_2(Y_3Z_1 - Y_1Z_3) + y_3(Y_1Z_2 - Y_2Z_1)}{(Y_1Z_2 - Y_2Z_1) + (Y_2Z_3 - Y_3Z_2) + (Y_3Z_1 - Y_1Z_3)}$$

$$+ \frac{z_1(Y_2Z_3 - Y_3Z_2) + z_2(Y_3Z_1 - Y_1Z_3) + z_3(Y_1Z_2 - Y_2Z_1)}{(Y_1Z_2 - Y_2Z_1) + (Y_2Z_3 - Y_3Z_2) + (Y_3Z_1 - Y_1Z_3)} \cdot i$$

Ob die Wurzel wirklich innerhalb des durch x_1, x_2, x_3 bestimmten Dreieckes liegt, erkennt man hier, wie in §. 16, an den Zeichenwechseln von Y und Z.

Aus x_4 und den beiden geeignetsten der vorhergehenden Näherungswerthe kann man nun nach §. 16 einen noch genaueren Werth x_5 berechnen und sich überhaupt dem wahren Werthe von x nach Belieben nähern.

Das vorstehende Verfahren ist offenbar auch anwendbar, wenn die gegebene Gleichung komplexe Koeffizienten hat.

§. 23.

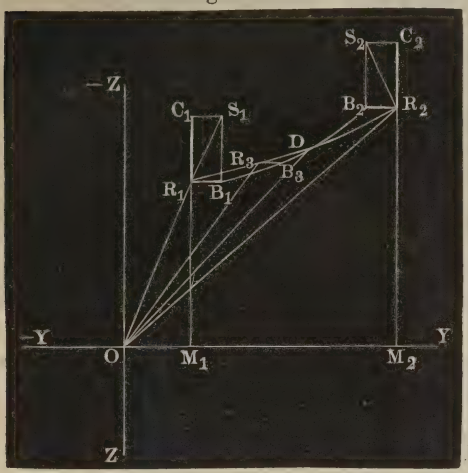
Geometrische Konstruktion der komplexen Wurzeln.

1. Durch das in §. 20 beschriebene Verfahren kann man die komplexen Wurzeln einer Gleichung durch geometrische Konstruktion zur Anschauung bringen. Dort verfolgten wir nur den Zweck der Bestimmung der Anfangsziffer des reellen und des imaginären Theiles, wess-

halb es nicht erforderlich war, die beiden Kurven, deren Durchschnitt die komplexe Wurzel erzeugt, ganz genau zu verzeichnen. Will man eine genauere Verzeichnung in der Absicht herstellen, daraus sofort einen möglichst genauen Werth der komplexen Wurzel zu entnehmen; so kann Diess folgendermassen geschehen.

In Fig. 28, welche zwei rechtwinklige Koordinatenaxen der y und z enthält, trägt man zunächst die Werthe der Grössen $x = y + zi$, welche man in die gegebene Funktion $f(x)$ substituiren will, als Linien auf, sodass z. B. $OR_1 = x_1 = y_1 + z_1 i$ irgend einer dieser Werthe ist. An den Endpunkt R_1 eines solchen Werthes von x trägt man die Grösse $f(x_1)$, welche ebenfalls in der Form $Y_1 + Z_1 i$ erscheint, als Linie $R_1 S_1$ auf, indem man die Horizontale $R_1 B_1 = Y_1$ und die Vertikale $R_1 C_1 = Z_1$ macht. Ist nun $OR_2 = x_2 = y_2 + z_2 i$ ein zweiter Werth von x, und $R_2 S_2 = f(x_2)$ der zugehörige Werth von $f(x)$, dessen reeller Theil Y_2 das entgegengesetzte Zeichen von Y hat; so sei $R_1 D R_2$ die Kurve, welche die Endpunkte der Grössen x, die man in irgend einer Weise von x_1 bis x_2 hat variiren lassen, enthält; ferner sei $B_1 D B_2$ die Kurve, welche die Endpunkte der reellen Theile der an die Werthe von x getragenen Werthe von $f(x)$ verbindet. Jetzt ist offenbar für jeden Zwischenwerth von x, wie $OR_3 = x_3$, die von R_3 bis an die Kurve $B_1 B_2$ gezogene Horizontale $R_3 B_3$ der reelle Theil von $f(x_3)$. Der Durchschnittspunkt der beiden Kurven $R_1 R_2$ und $B_1 B_2$ bezeichnet also einen solchen Werth von x, für welchen der reelle Theil von $f(x)$, also Y gleich null ist, und es leuchtet ein, dass sich jene beiden Kurven nothwendig durchschneiden müssen.

Fig. 28.



Übrigens wäre es möglich, dass sich diese Kurven ausser in D noch in einem anderen Punkte E nach Fig. 29 (a. f. S.) schnitten, welcher so beschaffen ist, dass eine durch ihn gezogene Horizontale GF jene Kurven nochmals trifft. Dass ein solcher Durchschnittspunkt hier nicht in Betracht kommt, ist klar, weil derselbe einen Werth $OE = x$

bezeichnet, für welchen der reelle Theil von $f(x)$, also Y nicht $= 0$, sondern $= EF$ ist.

Fig. 29.

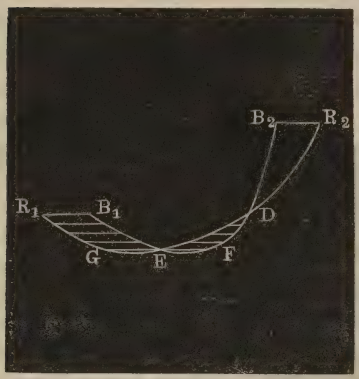
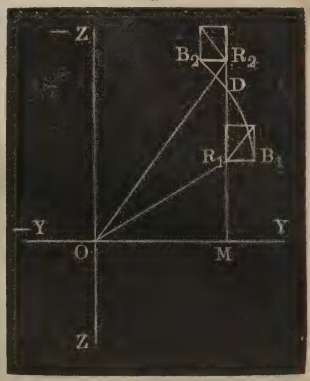


Fig. 30.



Zweckmässig ist es daher, die Grösse $x = y + zi$ zur Bestimmung des Durchschnittspunktes D so variiren zu lassen, dass ihr Endpunkt die vertikale gerade Linie $R_1 R_2$ nach Fig. 30 durchläuft, dass also $OM = y$ konstant bleibt und nur z variirt.

Ausserdem braucht die Variation von x nur in so engen Grenzen gehalten zu werden, dass innerhalb derselben ein Zeichenwechsel von Y vor sich geht.

Macht man jetzt dieselbe Operation für eine andere Reihe der Werthe von x, worin das konstante Glied y einen anderen Werth OM', dann den Werth OM'' u. s. w. hat; so erhält man durch die verschiedenen Durchschnittspunkte $D, D', D'' \ldots$ (Fig. 31) die in §. 20 erwähnte Kurve, welche der Gleichung

$$Y = 0$$

entspricht.

Um die zweite in §. 20 bezeichnete Kurve zu konstruiren, welcher die Gleichung

$$Z = 0$$

angehört, lässt man $x = y + zi$ so variiren, dass z konstant bleibt und nur y sich ändert. Ist dann nach Fig. 32 $OR_1 = x_1$ ein Werth von x, für welchen der imaginäre Theil von $f(x)$, also Z_1 gleich $R_1 C_1$ ist, während OR_2 ein anderer Werth von x ist, für welchen Z_2 das entgegengesetzte Zeichen von Z_1 hat; so entspricht der Durchschnittspunkt der Kurve $C_1 C_2$ mit der Horizontalen $R_1 R_2$ einem Punkte der gesuchten Kurve $EE'E''$.

Nachdem so die beiden Kurven $DD'D''$ und $EE'E''$ konstruirt sind, ergeben deren Durchschnittspunkte die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$.

2. Die vorstehende Konstruktion stützt sich auf die Bedingung, dass wenn $f(x) = Y + Zi = 0$ sein soll, gleichzeitig $Y = 0$ und $Z = 0$

Fig. 31.

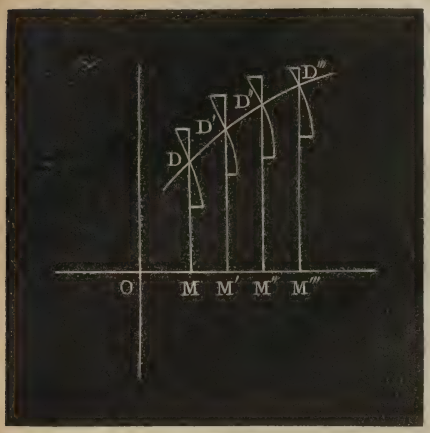
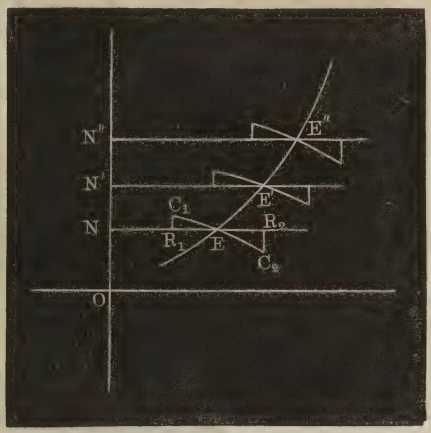


Fig. 32.

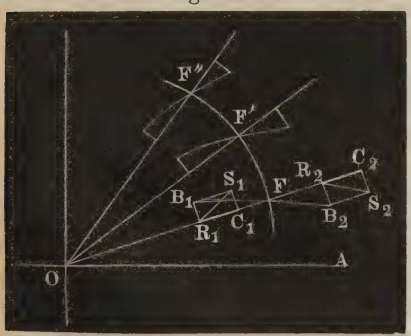


sein muss, und man sucht diese Bedingung zu realisiren, indem man in der Grösse $x = y + zi$ die beiden Theile y und z in gerader Linie variiren lässt.

Zuweilen, namentlich bei manchen transzendenten Gleichungen ist es bequemer, x in der Form $re^{\varphi i}$ zu behandeln und alsdann die absolute Länge r und den Winkel φ variiren zu lassen.

Unter solchen Umständen ist es dann aber oft zweckmässiger, die Grösse $f(x)$ nicht in die beiden Theile Y und Zi, welche den rechtwinkligen Grundaxen parallel sind, sondern in diejenigen beiden komplexen Summanden P und Q zu zerlegen, von welchen der eine P in die Richtung der Grösse x selbst fällt und der andere Q normal darauf steht, weil man alsdann umso gewisser die in Fig. 29 dargestellten doppelten Durchschnitte vermeidet. Die Zerlegung in P und Q kann aber durch geometrische Zeichnung ebenso leicht bewirkt werden, als die Zerlegung in Y und Zi.

Fig. 33.



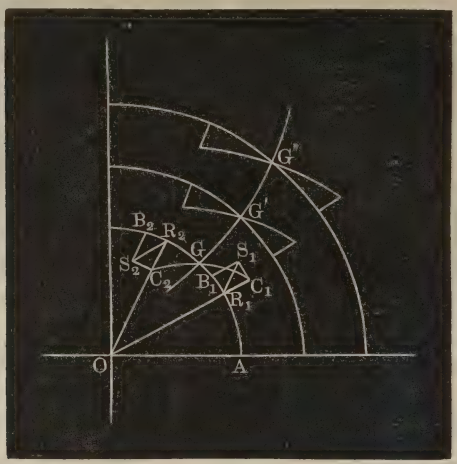
Offenbar muss auch jetzt sowohl $P = 0$, als auch $Q = 0$ sein.

Um Diess zu erreichen, lässt man in Fig. 33 von $x = re^{\varphi i}$, indem man den

Winkel $\varphi = AOR_1$ konstant erhält, nur die Länge r von $OR_1 = r_1$ bis OR_2 variiren, wobei die normale Komponente RB der Grösse $f(x) = RS$ ihre Richtung R_1B_1 in die entgegengesetzte R_2B_2 verwandelt. Der Durchschnitt der Kurve B_1B_2 mit der Geraden OR_1R_2 giebt einen Punkt F der Kurve $P = 0$. Ebenso findet sich für einen zweiten Werth des Winkels φ der Punkt F' und überhaupt die Kurve $FF'F''$.

Jetzt lässt man in Fig. 34, indem man die Länge $r = OR_1$ kon-

Fig. 34.



stant erhält,, den Winkel φ von AOR_1 bis AOR_2 variiren, wobei die zur Richtung von x parallele Komponente RC der Grösse $f(x) = RS$ ihre Richtung R_1C_1 in die entgegengesetzte R_2C_2 verwandelt. Der Durchschnitt der Kurve C_1C_2 mit dem Kreise R_1R_2 liefert einen Punkt G der Kurve $Q = 0$. Nachdem man auf dieselbe Weise mehrere Punkte dieser Kurve bestimmt hat, stellt sich dieselbe in der Gestalt $GG'G''$ dar.

Die Durchschnitte der beiden Kurven $FF'F''$ und $GG'G''$ ergeben dann die Wurzeln x der Gleichung $f(x) = 0$.

§. 24.

Die komplexen Wurzeln zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten.

1. Im zweiten Abschnitte haben wir nur die reellen Wurzeln zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten betrachtet.

Um die komplexen Wurzeln der in den beiden Gleichungen

$$f(x, x') = 0 \qquad f'(x, x') = 0$$

enthaltenen Unbekannten x und x' zu bestimmen, kann man $x = y + zi$, $x' = y' + z'i$ substituiren, wodurch sich, indem man in jeder Gleichung das Reelle und das Imaginäre für sich gleich null setzt, vier Gleichungen mit den vier Unbekannten y, z, y', z' ergeben, von welchen jetzt nur die reellen Werthe in Betracht kommen.

2. Einfacher wird es übrigens sein, aus den zwei gegebenen Gleichungen eine der beiden Unbekannten x, x' nach §. 11 und 12 zu eliminiren und dann die Schlussgleichung, welche nur die andere Unbekannte noch enthält, allgemein in komplexen Zahlen nach einer der vorstehend angegebenen Methoden aufzulösen

3. Wenn man durch irgend ein Mittel die Anfangsziffern der reellen und imaginären Theile y, zi, y', $z'i$ einer komplexen Auflösung der gegebenen Gleichung gefunden hat; so kann man auch das in §. 15 beschriebene Verfahren zur genaueren Berechnung anwenden, und dieses wird dann von allen das einfachste sein.

IV.

Die Auflösung der transzendenten Gleichungen.

§. 25.

Die reellen Wurzeln einer transzendenten Gleichung mit einer Unbekannten.

1. Die in §. 9 beschriebene geometrische Darstellung einer Gleichung und ihrer Derivirten findet auch auf transzendente Gleichungen Anwendung. Man wird daher durch Variation der Unbekannten x in der Reihe der reellen Zahlen die Grenzwerthe, zwischen welchen jede reelle Auflösung liegt, insbesondere die Anfangsziffer derselben ermitteln können.

Wenn die erste Derivirte der gegebenen Gleichung eine einfachere Funktion darstellt, was häufig der Fall ist; so ist es von Vortheil, erst die genäherten Wurzeln dieser derivirten Gleichung aufzusuchen. Hierdurch erhält man die Abszissen der Kulminationspunkte der fraglichen Kurve, zwischen welchen die Wurzeln der gegebenen Gleichung liegen, welche also als Grenzwerthe dieser Wurzeln zu betrachten sind.

Wäre die zweite Derivirte noch einfacher, als die erste, so könnte man auch jene erst näherungsweise auflösen. Hierdurch ergeben sich bekanntlich die Kulminationspunkte der ersten Derivirten oder die Wendepunkte der gegebenen Gleichung.

2. Ist z. B. die Gleichung

$$5 + 2x - 3 \sin x = 0$$

gegeben; so ist die erste derivirte Gleichung

$$2 - 3 \cos x = 0$$

oder

$$\cos x = \tfrac{2}{3}$$

leicht zu lösen.

Die letztere Gleichung wird für den Winkel $\pm$ 48° 11,5′ erfüllt, welchem man noch jedes beliebige positive oder negative Vielfache von 360° hinzufügen kann. Die kleinsten Glieder der unendlichen Reihe von Zahlwerthen, welche die derivirte Gleichung erfüllen, sind also

... — 7,124 — 5,442 — 0,841 0,841 5,442 7,124 ...

Eine Substitution dieser Werthe in die gegebene Gleichung, in welcher $\sin x$ immer den absoluten Werth 0,745 hat, aber abwechselnd negativ und positiv ist, ergiebt resp.

... — 7,013 — 7,119 5,553 4,447 18,119 17,013 ...

Man erkennt hieraus, dass die gegebene Gleichung nur eine reelle Auflösung hat, welche zwischen $x = -0{,}841$ und $-5{,}442$ liegt.

3. Auf die durch das obige Verfahren gefundenen Grenzwerthe, sie mögen nun dem wahren Werthe von x nahe oder fern liegen, lässt sich immer die Regula falsi nach §. 8 behuf genauerer Berechnung von x in Anwendung bringen.

Mit grösserem Vortheile kann man aber häufig auch nach dem in §. 7 erörterten Prinzipe eine Ziffer nach der anderen folgendermassen bestimmen.

Nachdem durch irgend ein Verfahren die erste Ziffer r von x ermittelt ist, substituirt man in die gegebene Gleichung

$$f(x) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

für x den Werth $r + x'$, stellt also die erste transformirte Gleichung

$$f(r + x') = f'(x') = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

her, deren Unbekannte x' um r kleiner ist, als die der gegebenen Gleichung. Bezeichnet nun f_1 den ersten Differentialkoeffizienten der Funktion f; so hat man näherungsweise

$$f'(x') = f(r) + f_1(r) \cdot x' = 0$$

also

$$x' = -\frac{f(r)}{f_1(r)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Die erste Ziffer dieses Werthes von x' giebt die zweite Ziffer r'' der Grösse x. Derselbe ist übrigens durch Substitution in Gl. (2) zu kontroliren, was dadurch geschieht, dass man untersucht, ob die beiden Substitutionen $x' = r'$ und $x' = r' + 1$ einen Zeichenwechsel hervorbringen.

Hat man auf diese Weise die zweite Ziffer r' gefunden; so stellt man aus der ersten transformirten Gleichung (2) durch die Substitution $x' = r' + x''$ die zweite transformirte Gleichung

$$f'(r' + x'') = f'(x'') = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

her, setzt wieder näherungsweise

$$f'(x'') = f'(r') + f'_1(r') \cdot x'' = 0$$

also

$$x'' = -\frac{f'(r')}{f'_1(r')} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Hieraus ergiebt sich die dritte Ziffer r''', welche durch Substitution von r'' und $r'' + 1$ in Gl. (4) zu kontroliren ist.

4. Man erkennt leicht, wie dieses Verfahren fortzusetzen ist. Übrigens beachte man, dass die Herstellung der Differentialkoeffizienten der transformirten Gleichungen keineswegs eine wiederholte Differentiation dieser Gleichungen erfordert. In derselben Weise nämlich, wie die transformirten Funktionen $f'(x')$, $f''(x'')$ u. s. w. aus der gegebenen Funktion $f(x)$ entstehen, genau in derselben Weise entstehen die Differentialkoeffizienten $f'_1(x')$, $f''_1(x'')$ u. s. w. der transformirten Funktionen aus dem Differentialkoeffizienten $f_1(x)$ der gegebenen Funktion. Transformirt man also den Differenzialkoeffizienten $f_1(x)$ ebenso wie die Funktion $f(x)$; so sind die nämlichen Substitutionen zu machen, um $f'_1(r')$, $f''_1(r'')$ u. s. w. zu erhalten, welche zu machen sind, um $f'(r')$, $f''(r'')$ u. s. w. darzustellen.

Überhaupt ist

$$f'(r') = f(r + r') \qquad f'_1(r') = f_1(r + r')$$
$$f''(r'') = f(r + r' + r'') \qquad f''_1(r'') = f_1(r + r' + r'')$$

u. s w. u. s. w.

Diese Beziehungen erweisen sich bei transzendenten Gleichungen oft nützlicher, als die transformirten Gleichungen. Es ist nämlich zuweilen am einfachsten, statt die transformirten Funktionen zu bilden, immer die volle Anzahl der für x gefundenen Ziffern, also erst r, dann $r + r'$, dann $r + r' + r''$ u. s. w. in $f(x)$ und $f_1(x)$ zu substituiren, um daraus nach Gl. (3), (5) u. s. w. die neuen Ziffern zu bilden. Die Kontrole erfolgt dann immer durch Substitution in die gegebene Gleichung.

5. Zieht man aber vor, die transformirten Gleichungen zu bilden, um nur Substitutionen von einziffrigen Zahlen zu haben, so kann man

auch beachten, dass

$$f(r) = f(0) \qquad f_1(r) = f_1(0)$$
$$f(r') = f'(0) \qquad f'_1(r') = f''_1(0)$$
$$f'(r'') = f''(0) \qquad f''_1(r'') = f'''_1(0)$$

u. s. w. u. s. w.

ist, und dass man immer leichter die Substitution 0 in die spätere, durch Transformation bereits dargestellte Gleichung, als die Substitution $r, r', r'' \ldots$ in die frühere, durch den Gang der Rechnung bereits verlassene Gleichung ausführt.

Überhaupt hat man für die Grössen r', r'', r''' immer folgende drei Näherungswerthe, zwischen welchen man nach Belieben wählen kann.

$$r' = -\frac{f(0)}{f_1(0)} = -\frac{f(r)}{f_1(r)}$$
$$r'' = -\frac{f'(0)}{f'_1(0)} = -\frac{f(r')}{f_1(r')} = -\frac{f(r+r')}{f_1(r+r')}$$
$$r''' = -\frac{f''(0)}{f''_1(0)} = -\frac{f'(r'')}{f'_1(r'')} = -\frac{f(r+r'+r'')}{f_1(r+r'+r'')}$$

u. s. w.

6. Von Wichtigkeit für die transzendenten Gleichungen ist aber noch der Fall, wo der Quotient $\frac{f(x)}{f_1(x)} = F(x)$ sich als eine einfache Funktion darstellt.

In diesem Falle kann man sofort diese Funktion transformiren, indem man erst $x = r + x'$, dann $x' = r' + x''$ u. s. w. setzt, wodurch sich

$$F'(x'), \qquad F''(x'') \ldots$$

ergiebt. Die Ziffern r', r'' sind dann

$$r' = -F'(0) = -F(r)$$
$$r'' = -F''(0) = -F'(r')$$
$$r''' = -F'''(0) = -F''(r'')$$

u. s. w.

Wäre z. B. $f(x) = xe^x$, also $f_1(x) = (1+x)e^x$; so hätte man einfach

$$F(x) = \frac{x}{1+x}$$
$$F'(x) = \frac{r+x'}{1+r+x'}$$

u. s. w.

7. Schliesslich bemerken wir, dass wenn man versäumt hätte, eine aus diesen Näherungswerthen gefundene Ziffer $r', r'', r''' \ldots$ durch Sub-

stitution derselben und der benachbarten Ziffern in die betreffende Gleichung zu kontroliren, eine etwa falsch gegriffene Ziffer sich dadurch verrathen wird, dass man späterhin entweder eine Ziffer $\geqq 10$ oder eine Ziffer von entgegengesetztem Zeichen erhält.

§. 26.

Beispiele.

1. Es sei die schon im vorstehenden Paragraphen betrachtete Gleichung

$$5 + 2x - 3 \sin x = 0$$

zu lösen. Da die reelle Wurzel zwischen 0 und — 6 liegt, also negativ ist; so kann man zunächst, um nur mit positiven Zahlen zu operiren, $-x$ für x in die gegebene Gleichung substituiren, wodurch dieselbe

$$f(x) = 5 - 2x + 3 \sin x = 0$$

wird. Da die gewöhnlichen trigonometrischen Tafeln nach Graden geordnet sind; so kann man den Bogen in eine Winkelgrösse verwandeln und danach

$$f(x) = 5 - 2x + 3 \sin (57^0\,17'\,45'' \,.\, x) = 0$$

schreiben.

Lässt man x durch die positiven ganzen Zahlen variiren, so kommt

$x=0$	$f(x) = 5$	$= 5$	$= +$
1	$3 + 3 \sin 57^0 17' 45'' =$	$3 + 3 \sin 57^0 17' 45'' =$	$= +$
2	$1 + 3 \sin 114^0 35' 30'' =$	$1 + 3 \cos 24^0 35' 30'' =$	$= +$
3	$-1 + 3 \sin 171^0 53' 15'' =$	$-1 + 3 \cos 81^0 53' 15'' =$	$= -$

Die erzte Ziffer von x ist also $r = 2$.

Für den ersten Differenzialkoeffizienten hat man

$$f_1(x) = -2 + 3 \cos x = -2 + 3 \cos (57^0 17' 45'' \,.\, x) \quad . \; . \; (2)$$

Die erste Transformation von (1) und (2) giebt, indem man $x = 2 + x'$ setzt,

$$f'(x') = 1 - 2x' + 3 \sin (114^0 35' 30'' + 57^0 17' 45'' \,.\, x')$$
$$f_1(x') = \quad -2 \quad + 3 \cos (114^0 35' 30'' + 57^0 17' 45'' \,.\, x')$$

Diese beiden Gleichungen kann man auch schreiben

$$f'(x') = 1 - 2x' + 3 \cos (24^0 35' 30'' + 206265'' \,.\, x') \quad . \; . \; (3)$$
$$f_1(x') = \quad -2 \quad - 3 \sin (24^0 35' 30'' + 206265'' \,.\, x') \quad . \; . \; (4)$$

worin der leichteren Rechnung wegen der Faktor von x', welcher $= 57^0 17' 45''$ ist, in $206265''$ verwandelt ist.

Setzt man in (1) und (2) $x = r = 2$ oder in (3) und (4) $x' = 0$; so kömmt

$$x' = \frac{1 + 3\cos 24^0 35' 30''}{2 + 3\sin 24^0 35' 30''} = \frac{3{,}725}{3{,}248} = 1{,}1\ldots$$

Dieser Werth, welcher $r' = 1$ erfordern würde, ist offenbar zu gross, da er in keinem Falle den Werth 0,9 übersteigen kann. Die Kontrolerechnung ergiebt, indem man erst $x' = r' = 0{,}9$ und dann $= 0{,}8$ substituirt, dass der letztere Werth 0,8 zu nehmen ist.

Die zweite Transformation für $r' = 0{,}8$ liefert jetzt aus (3) und (4), indem man $x' = 0{,}8 + x''$ setzt,

$$f''(x'') = -0{,}6 - 2x'' + 3\cos(70^0 25' 42'' + 206265'' \cdot x'') \quad \ldots (5)$$

$$f''_1(x'') = \quad -2 \quad -3\sin(70^0 25' 42'' + 206265'' \cdot x'') \quad \ldots (6)$$

Setzt man jetzt in (3) und (4) $x' = r' = 0{,}8$ oder in (5) und (6) $x'' = 0$; so kömmt

$$x'' = \frac{-0{,}6 + 3\cos 70^0 25' 42''}{2 + 3\sin 70^0 25' 42''} = \frac{0{,}4049}{4{,}8266} = 0{,}08\ldots$$

Der Werth $r'' = 0{,}08$ wird auch durch die Kontrolerechnung bestätigt.

Die dritte Transformation für $r'' = 0{,}08$ liefert aus (5) und (6), indem man $x'' = 0{,}08 + x'''$ setzt,

$$f'''(x''') = -0{,}76 - 2x''' + 3\cos(75^0 0' 43'' + 206265''.x''') \quad \ldots (7)$$

$$f'''_1(x''') = \quad -2 \quad -3\sin(75^0 0' 43'' + 206265''.x''') \quad \ldots (8)$$

Setzt man jetzt in (5) und (6) $x'' = r'' = 0{,}08$ oder in (7) und (8) $x''' = 0$; so kömmt

$$x''' = \frac{-0{,}76 + 3\cos 75^0 0' 43''}{2 + 3\sin 75^0 0' 43''} = \frac{0{,}0158}{4{,}8979} = 0{,}003\ldots$$

Man hat also $r''' = 0{,}003$. Diess giebt aus (7) und (8) die vierte Transformation

$$f''''(x'''') = -0{,}766 - 2x'''' + 3\cos(75^0 11' 1'' + 206265''.x'''') \quad \ldots (9)$$

$$f''''_1(x'''') = \quad -2 \quad -3\sin(75^0 11' 1'' + 206265''.x'''') \quad \ldots (10)$$

Setzt man in (12) und (13) $x''' = r''' = 0{,}003$ oder in (9) und (10) $x'''' = 0$; so kömmt

$$x'''' = \frac{-0{,}766 + 3\cos 75^0 11' 1''}{2 + 3\sin 75^0 11' 1''} = \frac{0{,}001167}{4{,}9002} = 0{,}0002\ldots$$

Es ist also $r'''' = 0{,}0002$; mithin die Wurzel der ursprünglich gegebenen Gleichung, auf vier Dezimalen genau,

$$x = -2{,}8832$$

2. Die gegebene Gleichung sei

$$f(x) = -10000 + 2x + \log x = 0$$

Die derivirte Gleichung ist

$$f_1(x) = 2 + \frac{1}{x}$$

Man findet, dass die reelle Wurzel zwischen 4000 und 5000 liegt, dass also die erste Ziffer $r = 4000$ ist.

Hiernach ergiebt die Substitution $x = 4000 + x'$ die ersten transformirten Gleichungen

$$f(x') = -2000 + 2x' + log\,(4000 + x')$$

$$f_1(x') = 2 + \frac{1}{4000 + x'}$$

folglich

$$x' = -\frac{-2000 + log\,4000}{2 + \frac{1}{4000}} = \frac{1991{,}7}{2{,}00025} = 995, \ldots$$

also r' 900.

Die Substitution $x' = 900 + x''$ liefert die zweiten transformirten Gleichungen

$$f''(x'') = -200 + 2x'' + log\,(4900 + x'')$$

$$f''_1(x'') = 2 + \frac{1}{4900 + x''}$$

also

$$x'' = -\frac{-200 + log\,4900}{2 + \frac{1}{4900}} = \frac{191{,}5}{2{,}0002} = 95, \ldots$$

$$r'' = 90$$

Jetzt erhält man durch die Substitution $x'' = 90 + x'''$

$$f'''(x''') = -20 + 2x''' + log\,(4990 + x''')$$

$$f'''_1(x''') = 2 + \frac{1}{4990 + x'''}$$

also

$$x''' = -\frac{-20 + log\,4990}{2 + \frac{1}{4990}} = \frac{11{,}48}{2{,}0002} = 5, \ldots$$

$$r''' = 5$$

Hieraus folgt durch die Substitution $x''' = 5 + x^{IV}$

$$f^{IV}(x^{IV}) = -10 + 2x^{IV} + log\,(4995 + x^{IV})$$

$$f_1^{IV}(x^{IV}) = 2 + \frac{1}{4995 + x^{IV}}$$

also

$$x^{IV} = -\frac{-10 + log\ 4995}{2 + \frac{1}{4995}} = 0{,}7\ldots$$

$$r^{IV} = 0{,}7$$

Die Substitution $x^{IV} = 0{,}7 + x^{V}$ liefert

$$f^{V}(x^{V}) = -8{,}6 + 2\,x^{V} + log\ (4995{,}7\ x^{V})$$

$$f_1^{V}(x^{V}) = 2 + \frac{1}{4995{,}7 + x^{V}}$$

also

$$x^{V} = -\frac{-8{,}6 + log\ 4995{,}7}{2 + \frac{1}{4995{,}7}} = \frac{0{,}0836}{2{,}0002} = 0{,}04$$

Die gesuchte Wurzel ist hiernach

$$x = 4995{,}74\ldots$$

3. Die gegebene Gleichung sei

$$f(x) = x^{x} - 30 = 0$$

Die derivirte Funktion ist

$$f_1(x) = x^{x}\,(1 + log\ x) = x^{x}\,(1 + 2{,}30258\ log\ vulg\ x)$$

Hiernach hat man

$$-\frac{f(x)}{f_1(x)} = -F(x) = \frac{\frac{30}{x^{x}} - 1}{2{,}30258\ log\ vulg\ x + 1}$$

Die erste Ziffer der reellen Wurzel findet sich leicht als $r = 3$. Nimmt man also $x = 3$; so ist für die zweite Ziffer

$$r' = -F(3) = \frac{\frac{30}{3^{3}} - 1}{2{,}30258\ log\ vulg\ 3 + 1} = 0{,}05\ldots$$

Man hat also $r' = 0$ und $r'' = 5$.

Setzt man jetzt $x = 3{,}05$; so ist

$$r''' = -F(3{,}05) = \frac{\frac{30}{3{,}05^{3{,}05}} - 1}{2{,}30258\ log\ vulg\ 3{,}05 + 1} = 0{,}0000007$$

Die vierte bis siebente Ziffer sind also $= 0$ und die achte ist 0,0000007; folglich ist die gesuchte Wurzel, auf sieben Dezimalen genau,

$$x = 3{,}0500007$$

§. 27.

Die reellen Wurzeln von zwei transzendenten Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Wenn zwei transzendente oder eine transzendente und eine algebraische Gleichung, eine jede mit zwei Unbekannten gegeben ist; so wird man selten im Stande sein, die eine Unbekannte zu eliminiren und eine Gleichung mit nur einer Unbekannten herzustellen. In diesem Falle hat man sich zur Auflösung des Verfahrens aus §. 14 zu bedienen, wodurch man im Stande ist, die Anfangsziffern der beiden Unbekannten zu bestimmen.

Nachdem Diess geschehen, kömmt zur genaueren Berechnung der Wurzeln ein Verfahren in Anwendung, welches dem in §. 15 vorgetragenen ganz analog ist. Freilich lassen sich die transformirten Gleichungen nicht nach der für algebraische Gleichungen angegebenen einfachen Regel herstellen: Diess hindert aber nicht, dieselben durch die in §. 25 angewandte gewöhnliche Substitution $x = r + x'$ und $y = s + y'$ zu bilden.

Ausserdem treten jetzt an die Stelle der Grössen a, b, c, α, β, γ, aus welchen man dort die Näherungswerthe für x', y', also die nächstfolgenden Ziffern r', s' bildete, die durch nachstehende Betrachtung sich ergebenden Werthe.

Die beiden gegebenen Gleichungen seien

$$f(x, y) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$g(x, y) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

also die ersten transformirten Gleichungen

$$f'(x', y') = f(r + x', s + y') = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$g'(x', y') = g(r + x', s + y') = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Bezeichnen wir die Differentialkoeffizienten der Funktion f für x und y resp. mit f_x und f_y, ebenso die der Funktion g mit g_x und g_y; so sind die ersten transformirten Gleichungen näherungsweise

$$f'(x', y') = f(r, s) + f_x(r, s) \cdot x' + f_y(r, s) \cdot y' = 0 \quad . \quad . \quad (5)$$

$$g'(x', y') = g(r, s) + g_x(r, s) \cdot x' + g_y(r, s) \cdot y' = 0 \quad . \quad . \quad (6)$$

Hieraus folgt, wenn wir der Kürze wegen die Andeutung der Substitution $x = r$, $y = s$ unterdrücken, also kurz f für $f(r, s)$ schreiben,

$$x' = \frac{f_y g - f g_y}{f_x g_y - f_y g_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$y' = \frac{f g_x - f_x g}{f_x g_y - f_y g_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Die Berechnung dieser Werthe von x' und y' geschieht nach dem in §. 15 aufgestellten Schema, also in folgender Weise:

$f_x\, g_y$	$f_y\, g$	$f\, g_x$
$f_y\, g_x$	$f\, g_y$	$f_x g$
$f_x g_y - f_y g_x$	$f_y g - f g_y$	$f g_x - f_x g$

Die erste Grösse ist der gemeinschaftliche Divisor, die zweite der Dividend von x', die dritte der Dividend von y'.

Die Kontrole der hieraus sich ergebenden zweiten Ziffern r', s' geschieht wie in §. 15 durch Ausführung folgender vier Substitutionen in die transformirten Gleichungen

x'	$=$	r'	r'	$r' + 1$	$r' + 1$
y'	$=$	s'	$s' + 1$	s'	$s' + 1$

Es ist jetzt klar, wie sich die Rechnung zur Bestimmung der späteren Ziffern fortsetzt. Wir machen für die praktische Ausführung auf Folgendes aufmerksam. Aus den allgemeinen Funktionen

$$f \quad f_x \quad f_y \quad g \quad g_x \quad g_y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

entstehen die ersten transformirten

$$f' \quad f'_x \quad f'_y \quad g' \quad g'_x \quad g'_y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

durch die Substitution

$$x = r + x', \quad y = s + y'$$

Die Grössen, welche zur Berechnung von x', y' nach (7), (8) dienen, erhält man nun entweder durch die Substitution $x = r$, $y = s$ in die Ausdrücke (9) oder, was bequemer ist, durch die Substitution $x' = 0$, $y' = 0$ in die Ausdrücke (10).

Die Substitution $x' = r' + x''$, $y' = s' + y''$ in die Funktionen (10) liefert die zweiten transformirten Funktionen

$$f'' \quad f''_x \quad f''_y \quad g'' \quad g''_x \quad g''_y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Die zur Berechnung von x'', y'' erforderlichen Grössen ergeben sich entweder aus (10) durch die Substitution $x' = r'$, $y' = s'$ oder aus (11) durch die Substitution $x'' = 0$, $y'' = 0$.

§. 28.

Beispiel.

Es seien die beiden Gleichungen

$$f = x - y + 10\ log\ (x + y) - 170 = 0$$

$$g = e^{\frac{x-y}{100}} + sin\ (x+y)^0 - 3 = 0$$

gegeben, worin der Werth von $x + y$ hinter dem Sinuszeichen in Graden genommen werden soll. Lässt man x und y in der Zahlenreihe 0, 100, 200 . . . variiren; so findet man

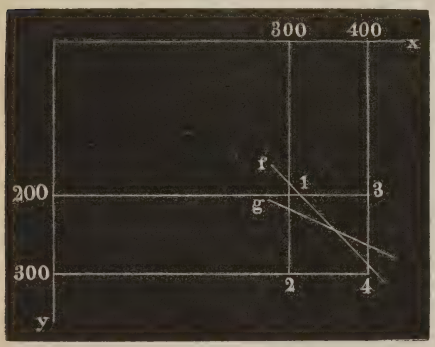
	1	2	3	4
$x =$	300	300	400	400
$y =$	200	300	200	300
$f =$	— 7,85	— 106	94	— 4,49
$g =$	0,36	— 2,87	3,52	— 0,62

Diese Zeichenwechsel, welche die in Fig. 35 dargestellte Lage der beiden Kurven $f = 0$ und $g = 0$ bedingen, lehren, dass in dem Quadrate, dessen Ecken die vorstehenden Werthe von x und y zu Koordinaten haben, ein Durchschnitt stattfindet, dass also

$$r = 300 \qquad s = 200$$

die ersten Ziffern einer reellen Auflösung sind.

Fig. 35.



Für die Differentialkoeffizienten hat man, wenn man berücksichtigt, dass die Grösse hinter dem Sinuszeichen, welche in Graden genommen werden soll, mit $\frac{\pi}{180} = 0{,}017453$ zu multipliziren ist, um einen Bogen darzustellen, dass also dieser Faktor in das Differential des Sinus eintritt,

$$f_x = 1 + \frac{10}{x+y}$$

$$f_y = -1 + \frac{10}{x+y}$$

$$g_x = \tfrac{1}{100}\, e^{\frac{x-y}{100}} + 0{,}017453\ cos\ (x+y)^0$$

$$g_y = -\tfrac{1}{100}\, e^{\frac{x-y}{100}} + 0{,}017453\ cos\ (x+y)^0$$

Demnach sind die ersten transformirten Funktionen, welche sich durch die Substitution $x = 300 + x'$, $y = 200 + y'$ ergeben,

$$f' = x' - y' + 10\ log\ (500 + x' + y') - 70 = 0$$

$$g' = e^{\frac{100+x'-y'}{100}} + sin\ (40 - x' - y')^0 - 3 = 0$$

$$f'_x = 1 + \frac{10}{500+x'+y'}$$

$$f'_y = -1 + \frac{10}{500+x'+y'}$$

$$g'_x = \tfrac{1}{100}\, e^{\frac{100+x'-y'}{100}} - 0{,}017453\ cos\ (40 - x' - y')^0$$

$$g'_y = -\tfrac{1}{100}\, e^{\frac{100+x'-y'}{100}} - 0{,}017453\ cos\ (40 - x' - y')^0$$

Für $x' = 0$, $y' = 0$ werden diese Ausdrücke

$$f = 10\ log\ 500 - 70 = -7{,}854$$

$$g = e + sin\ 40^0 - 3 = 0{,}361$$

$$f_x = 1 + \tfrac{1}{50} = 1{,}020$$

$$f_y = -1 + \tfrac{1}{50} = -0{,}980$$

$$g_x = \frac{e}{100} - 0{,}017453\ cos\ 40^0 = 0{,}0138$$

$$g_y = -\frac{e}{100} - 0{,}017453\ cos\ 40^0 = -0{,}0405$$

Zur Berechnung der zweiten Ziffern r', s' hat man also folgende Rechnung

1,02	— 0,98	— 7,854	1,02
0,0138	— 0,0405	0,361	0,0138
— 0,0413	— 0,3538	— 0,1088
— 0,0136	0,3181	0,3682
— 0,0277	— 0,6719	— 0,4770

$$r' = 24, \ldots \qquad s' = 17, \ldots$$

Hiernach sind die zweiten Ziffern $r' = 20$, $s' = 10$.

Die Substitution $x' = 20 + x''$, $y' = 10 + y''$ ergiebt jetzt die zweiten transformirten Funktionen

$$f'' = x'' - y'' + 10 \log (530 + x'' + y'') - 60 = 0$$

$$g'' = e^{\frac{110 + x'' - y''}{100}} + \sin (10 - x'' - y'')^0 - 3 = 0$$

$$f''_x = 1 + \frac{10}{530 + x'' + y''}$$

$$f''_y = -1 + \frac{10}{530 + x'' + y''}$$

$$g''_x = \tfrac{1}{100}\, e^{\frac{110 + x'' - y''}{100}} - 0{,}017453 \cos (10 - x'' - y'')^0$$

$$g''_y = -\tfrac{1}{100}\, e^{\frac{110 + x'' - y''}{100}} - 0{,}017453 \cos (10 - x'' - y'')^0$$

Für $x'' = 0$, $y'' = 0$ werden diese Ausdrücke

$$f' = 10 \log 530 - 60 = 2{,}7288$$

$$g' = e^{1{,}1} + \sin 10^0 - 3 = 0{,}1778$$

$$f'_x = 1 + \tfrac{1}{53} = 1{,}0189$$

$$f'_y = -1 + \tfrac{1}{53} = -0{,}9811$$

$$g'_x = \frac{e^{1{,}1}}{100} - 0{,}017453 \cos 10^0 = 0{,}01286$$

$$g'_y = -\frac{e^{1{,}1}}{100} - 0{,}017453 \cos 10^0 = -0{,}04722$$

Diess giebt folgende Berechnung der dritten Ziffern r'', s''.

1,0189	— 0,9811	2,7288	1,0189
0,01286	— 0,04722	0,1778	0,01286
— 0,0481	— 0,1744	0,0351	
— 0,0126	— 0,1288	0,1812	
— 0,0355	— 0,0456	— 0,1461	

$r'' = 1, \ldots$ $s'' = 4, \ldots$

Die dritten Ziffern sind also $r'' = 1$ und $s'' = 4$, folglich die Auflösung bis auf Einer genau

$x = 321$ $y = 214$

§. 29.

Die komplexen Wurzeln einer transzendenten Gleichung.

Nachdem in §. 27 die Auflösung zweier transzendenten Gleichungen mit zwei Unbekannten in reellen Zahlen gelehrt ist, hat die Auflösung einer transzendenten Gleichung mit einer Unbekannten in komplexen Zahlen keine Schwierigkeit. Durch die Substitution $x = y + zi$ und die Trennung des Reellen vom Imaginären zerfällt eine solche Gleichung sofort in zwei andere mit zwei Unbekannten, welche in reellen Zahlen zu lösen sind.

Einfacher ist übrigens das direkte Verfahren, welches dem in §. 21 vorgetragenen analog ist und hier folgende Modifikationen erfordert.

Hat man nämlich auf irgend eine Weise die Anfangsziffern r, s des reellen und imaginären Theiles von x bestimmt, was nach §. 20 oder 23 geschehen kann, und ist $f(x)$ die derivirte Funktion der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$; so bildet man durch die Substitution $x = r + y' + (s + z')\,i$ die ersten transformirten Funktionen

$$f'(x') = f[r + y' + (s + z')\,i] = 0$$

$$f'_1(x') = f_1[r + y' + (s + z')\,i]$$

Man hat jetzt auch hier, wie in §. 25, näherungsweise

$$f'(x') = f(r + si) + f_1(r + si) \cdot (y' + z'i) = 0$$

also

$$y' + z'i = -\frac{f(r + si)}{f_1(r + si)}$$

oder was Dasselbe ist

$$y' + z'i = -\frac{f'(0)}{f'_1(0)}$$

Wenn man dafür sorgt, dass der Nenner des Bruches auf der rechten Seite reell wird; so ergiebt diese Formel gleichzeitig den Näherungswerth von y' und von z', also die zweiten Ziffern r', s'.

Die Rechnung setzt sich jetzt genau so fort, wie es in §. 25 beschrieben ist.

§. 30.

Beispiel.

Es sei die Gleichung

$$f(x) = xe^x + 93000 + 2800\sqrt{-1} = 0$$

gegeben. Die derivirte Funktion ist

$$f_1(x) = e^x + xe^x$$

folglich der Quotient

$$F(x) = \frac{f(x)}{f_1(x)} = \frac{xe^x + 93000 + 2800i}{e^x + xe^x}$$

Dividirt man Zähler und Nenner durch e^x; so hat man

$$F(x) = \frac{x + (93000 + 2800i)\,e^{-x}}{1 + x}$$

Für komplexe Werthe $x = y + zi$ nimmt dieser Ausdruck die Form

$$F(y+zi) = \frac{y+zi+(93000+2800i)\,(\cos 57{,}2958z^0 - \sin 57{,}2958z^0.i)}{1+y+xi}$$

an, worin die Bogengrössen durch Multiplikation mit 57,2958 in Winkelgrössen verwandelt sind.

Ein Näherungswerth von x ist $9 + 3i$; es ist jedoch nicht ermittelt, ob 9 und 3 etwas zu gross oder etwas zu klein seien: die erste Substitution wird Diess ausweisen. Setzt man $y + zi = 9 + 3i$; so wird

$$y' + z'i = -F(9+3i) =$$

$$= -\frac{9+3i+(93000+2800i)\,(-\cos 8^0 6'45'' - \sin 8^0 6'45''.i)}{10+3i}$$

$$= \frac{2{,}31 - 1{,}039i}{10+3i} = \frac{19{,}98 - 17{,}32i}{109} = 0{,}1\ldots - 0{,}1..i$$

Hieraus folgt, dass $z = 3$ zu gross ist, dass man also, da mehr als 0,1 davon zu subtrahiren ist, $z = 2{,}8$ zu nehmen hat. Setzt man also $y + zi = 9{,}1 + 2{,}8i$; so wird

$$y'' + z''i = -F(9{,}1 + 2{,}8\,i) =$$

$$= -\frac{9{,}1 + 2{,}8\,i + (93000 + 2800\,i)\,(-\cos 19^0 34' 16'' - \sin 19^0 34' 16''.\,i)}{10{,}1 + 2{,}8\,i}$$

$$= \frac{0{,}68 + 0{,}97\,i}{10{,}1 + 2{,}8\,i} = \frac{9{,}584 + 7{,}893\,i}{109{,}8} = 0{,}08\ldots + 0{,}07\ldots i$$

Die dritten Ziffern wären also 8 und 7: man findet aber durch die Kontrole, dass die erste um eine Einheit zu gross, also auf 7 zu reduziren ist. Setzt man daher $y + z\,i = 9{,}17 + 2{,}87\,i$; so kömmt

$$y''' + z'''i = -F(9{,}17 + 2{,}87\,i) =$$

$$= -\frac{9{,}17 + 2{,}87\,i + (93000 + 2800\,i)\,(-\cos 15^0 33' 38'' - \sin 15^0 33' 38''.\,i)}{10{,}17 + 2{,}87\,i}$$

$$= \frac{0{,}907 + 0{,}0625}{111{,}67} = 0{,}008\ldots + 0{,}000\ldots i$$

Die vierten Ziffern sind mithin 8 und 0; folglich die gesuchte Wurzel, auf drei Dezimalen genau,

$$x = 9{,}178 + 2{,}870\,\sqrt{-1}$$

Nachtrag.

§. 31.

Anwendung des im vorstehenden Abschnitte erläuterten Verfahrens auf die algebraischen Gleichungen.

Es ist selbstverständlich, dass die im letzten Abschnitte zur Auflösung transzendenter Gleichungen erörterten Methoden ohne Weiteres auch für algebraische Gleichungen anwendbar sind. Wenn die gegebene algebraische Gleichung rational ist, wird man sich natürlich immer mit grösserem Vortheile der in den früheren Abschnitten behandelten Auflösungsmethoden bedienen. Ist jedoch die algebraische Gleichung in irrationaler Form gegeben; so kann es unter Umständen rathsam sein, diese irrationale Form beizubehalten und die für transzendente Gleichungen gegebenen Regeln darauf anzuwenden, weil das Rationalmachen der Gleichung möglicherweise zu einer Gleichung von sehr hohem Grade führen kann, welche wegen der Höhe des Grades und der Grösse der Koeffizienten selbst nach der bequemen Methode vielleicht schwieriger zu behandeln ist, als die ursprüngliche Gleichung in irrationaler Gestalt nach den für tanszendente Gleichungen aufgestellten Regeln.

Wäre z. B. die Gleichung

$$x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} = 5$$

gegeben; so würde das Rationalmachen zu einem sehr hohen Grade führen: da aber die gegebene irrationale Form einfach ist und die erforderlichen Rechnungen mit logarithmischer Hülfe sich leicht bewerkstelligen lassen; so möchte es vorzuziehen sein, die Auflösung nach dem letzten Abschnitte zu bewirken.

Wir schreiben daher

$$f(x) = x + x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{4}} - 5 = 0$$

Die erste derivirte Funktion ist

$$f_1(x) = 1 + \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \tfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$$

Man findet leicht, dass eine reelle Wurzel zwischen r und 2 liegt. Um dieselbe genauer zu berechnen, haben wir $r = 1$, also

$$f(r) = f(1) = 1 + 1 + 1 + 1 - 5 = -1$$
$$f_1(r) = f_1(1) = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{25}{12}$$
$$x' = -\frac{f(1)}{f_1(1)} = \tfrac{12}{25} = 0{,}48$$

Als zweite Ziffer wäre also 0,4 anzunehmen; man findet jedoch, dass dieselbe zu klein ist und dass man $r' = 0{,}5$ setzen muss. Wenn man sich bei der Berechnung von $f(r + r') = f(1{,}5)$ und $f_1(r + r') = f_1(1{,}5)$ der Logarithmen bedienen will, braucht man behuf Bestimmung der folgenden Ziffern nicht alle sieben Stellen der Mantisse zu notiren: es genügen vielmehr für die nächsten beiden Ziffern drei- und vierziffrige Mantissen.

Die Operation setzt sich mit allen Hülfsrechnungen folgendermassen fort.

	Zahl
$log\ 1{,}5 = 0{,}1761$	1,5
$log\ 1{,}5^{\frac{1}{2}} = 0{,}0880$	1,2246
$log\ 1{,}5^{\frac{1}{3}} = 0{,}0587$	1,1447
$log\ 1{,}5^{\frac{1}{4}} = 0{,}0440$	1,1066
	$4{,}9759 - 5 = -0{,}0241 = f(1{,}5)$

$log\ 1{,}5^{\frac{2}{3}} = 0{,}1174$		
$log\ 1{,}5^{\frac{3}{4}} = 0{,}1320$		1
$log\ 1{,}5^{-\frac{1}{2}} = 0{,}9120 - 1$	$0{,}81659 \times \tfrac{1}{2} =$	0,40829
$log\ 1{,}5^{-\frac{2}{3}} = 0{,}8826 - 1$	$0{,}76314 \times \tfrac{1}{3} =$	0,25438
$log\ 1{,}5^{-\frac{3}{4}} = 0{,}8680 - 1$	$0{,}73791 \times \tfrac{1}{4} =$	0,18448
		$1{,}84715 = f_1(1{,}5)$

$$x'' = -\frac{f(1{,}5)}{f_1(1{,}5)} = \frac{0{,}0241}{1{,}8471} = 0{,}01\ldots$$

Es ist also $r''' = 0{,}1$, und hiernach hat man

	Zahl
$log\ 1{,}51 = 0{,}17898$	1,51
$log\ 1{,}51^{\frac{1}{2}} = 0{,}08949$	1,2288
$log\ 1{,}51^{\frac{1}{3}} = 0{,}05066$	1,1473
$log\ 1{,}51^{\frac{1}{4}} = 0{,}04474$	1,1085
	$4{,}9946 - 5 = -0{,}0054 = f(1{,}51)$

$log\ 1{,}51^{\frac{2}{3}} = 0{,}11932$		
$log\ 1{,}51^{\frac{3}{4}} = 0{,}13392$		1
$log\ 1{,}51^{-\frac{1}{2}} = 0{,}91051 - 1$	$0{,}81379 \times \frac{1}{2} = 0{,}40689$	
$log\ 1{,}51^{-\frac{2}{3}} = 0{,}88068 - 1$	$0{,}75976 \times \frac{1}{3} = 0{,}25325$	
$log\ 1{,}51^{-\frac{3}{4}} = 0{,}86608 - 1$	$0{,}73465 \times \frac{1}{4} = 0{,}18366$	
	$1{,}84380 = f_1(1{,}51)$	

$$x''' = -\frac{f(1{,}51)}{f_1(1{,}51)} = \frac{0{,}0054}{1{,}8438} = 0{,}0029$$

Demnach ist $r''' = 0{,}002$; man kann aber, wenn man die Rechnung jetzt abbrechen will, mit grosser Genauigkeit 0,0029 nehmen, also für die gesuchte Wurzel

$$x = 1{,}5129$$

setzen.

Im Verlage der Schulbuchhandlung in Braunschweig ist erschienen:

Theorie

der

Gewölbe, Futtermau
Brück

sowol zum wissenschaftlichen Studiun
praktischen Gebrauch

von

Dr. Hermann Scheffler,
Baurath.

Mit 206 in den Text gedruckten Holzschnitten und 12 lithographirten Tafeln.

gr. 8. Fein Velinpapier. geh. Preis 2 Thlr. 20 Ngr.

Dieses Werk, welches als eine Ergänzung zu jedem Lehrbuche der Ingenieurwissenschaften angesehen werden kann, behandelt diejenigen drei Konstruktionen, welche für die grosse Praxis der Eisenbahn- und Wegbau-Ingenieure von überwiegender Wichtigkeit sind, nämlich die Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken, mit besonderer Ausführlichkeit und nach wesentlich neuen Prinzipien. Dasselbe füllt in diesen Materien durch möglichste Verallgemeinerung der Gesichtspunkte mehrfache Lücken aus, indem dasselbe z. B. in der Gewölbtheorie die mannichfaltigsten Formen der symmetrischen und unsymmetrischen Bogengewölbe, der Tunnel, der Kuppel-, Kloster- und Kreuzgewölbe, welche bisher eine genügende Behandlung nicht gefunden haben, nach ganz einfachen und leicht zu handhabenden Methoden prüfen und konstruiren lehrt.

Ausserdem enthält dasselbe mehrere andere interessante Erweiterungen der angewandten Mechanik, insbesondere das Prinzip des kleinsten Widerstandes, welches für die gesammte Konstruktionslehre von grosser praktischer Wichtigkeit und in diesem Werke zugleich die Grundlage der Theorie der Gewölbe und der Futtermauern ist, ferner eine Abhandlung über den Erddruck mit verschiedenen neuen Lehrsätzen und endlich in der Theorie der eisernen Brücken verschiedene Resultate, welche für die Lehre von der Festigkeit und Biegung eine besondere Bedeutung haben.

Das Ganze ist streng wissenschaftlich gehalten, daneben aber auch auf die praktische Anwendung berechnet, so dass dasselbe ebensowol einen Leitfaden für technische Lehranstalten, wie ein Handbuch für den ausführenden Ingenieur bildet.

Theorie

der

Festigkeit gegen das Zerknicken,

Nebst

Untersuchungen über die verschiedenen inneren Spannungen gebogener Körper und über andere Probleme der Biegungstheorie, mit praktischen Anwendungen.

Von

Dr. Hermann Scheffler,
Baurath,

Mit 84 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

gr. 8. Fein Velinpapier. geh. Preis 24 Ngr.

Das vorstehende Werk entwickelt die Theorie der Festigkeit gegen das Zerknicken nach den allgemeinen Grundgesetzen der Elastizität und erzielt Formeln, welche die Erscheinungen der Wirklichkeit mit hinlänglicher Genauigkeit wiedergeben, während bekanntermaassen die Navierschen Formeln mit der Beobachtung im Widerspruche stehen.

Ausserdem behandelt dasselbe verschiedene andere noch ungelös'te Aufgaben der Biegungstheorie und schliesst sich nach Form und Inhalt der vorstehend angekündigten Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken desselben Verfassers supplementarisch an.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
512.923SCH2A C001
DIE AUFLOSUNG DER ALGEBRAISCHEN UND TRAN
3 0112 017081545